BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

---------- 🕮 ----------

VŨ ĐÌNH CHINH

BỒI DƯỠNG CHO HỌC SINH NĂNG LỰC PHÁN ĐOÁN VÀ LẬP LUẬN CÓ CĂN CỨ TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

HÀ NỘI - 2016

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

---------- 🕮 ----------

VŨ ĐÌNH CHINH

BỒI DƯỠNG CHO HỌC SINH NĂNG LỰC PHÁN ĐOÁN VÀ LẬP LUẬN CÓ CĂN CỨ TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: Lý luận và phương pháp dạy học bộ môn Toán
Mã số: 62 14 01 11

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

Người hướng dẫn khoa học: 1. GS. TS. ĐÀO TAM
2. PGS.TS. HOÀNG LÊ MINH

HÀ NỘI - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được hoàn thành với sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của nhiều nhà khoa học. Các số liệu, kết quả được trình bày trong Luận án là trung thực. Những kết luận khoa học của Luận án chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả Luận án

Vũ Đình Chinh

NHỮNG CỤM TỪ VIẾT TẮT CHỦ YẾU TRONG LUẬN ÁN

STT	Viết tắt	Viết đầy đủ
1.	CM	Chứng minh
2.	DH	Dạy học
3.	GQVĐ	Giải quyết vấn đề
4.	GV	Giáo viên
5.	HH	Hình học
6.	HS	Học sinh
7.	LLCCC	Lập luận có căn cứ
8.	NL	Năng lực
9.	NLPĐ	Năng lực phán đoán
10.	PĐ	Phán đoán
11.	PPDH	Phương pháp dạy học
12.	QTSL	Quy tắc suy luận
13.	SL	Suy luận
14.	SGK	Sách giáo khoa
15.	THPT	Trung học phổ thông

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU 1
1. Lý do chọn đề tài 1
2. Tổng quan các vấn đề nghiên cứu 3
3. Mục đích nghiên cứu 7
4. Đối tượng nghiên cứu, khách thể nghiên cứu và phạm vi nghiên cứu 7
5. Giả thuyết khoa học 8
6. Câu hỏi nghiên cứu 8
7. Phương pháp nghiên cứu 8
8. Những đóng góp của Luận án 8
9. Những vấn đề đưa ra bảo vệ 9
10. Cấu trúc Luận án 9
CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LÝ LUẬN 10
1.1. Một số khái niệm liên quan đến phán đoán 10
1.1.1. Phán đoán 10
1.1.2. Dự đoán 10
1.1.3. Giả thuyết 11
1.1.4. Năng lực phán đoán 12
1.1.5. Phân biệt giữa phán đoán – dự đoán – giả thuyết 13
1.1.6. Mối liên hệ giữa phán đoán và giải quyết vấn đề 14
1.2. Các khái niệm liên quan đến lập luận có căn cứ 14
1.2.1. Suy luận 14
1.2.2. Lập luận có căn cứ 15
1.2.3. Suy diễn 15
1.2.4. Suy luận có lý và suy luận "nghe có lý" 16
1.2.5. Quy tắc suy luận 21
1.2.6. Chứng minh 22
1.2.7. Suy luận trong hình học 24
1.3. Các biểu hiện cơ bản của năng lực phán đoán 25
1.3.1. Năng lực xem xét các đối tượng Toán học, các mối quan hệ Toán học trong mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng 26
1.3.2. Năng lực sử dụng các hoạt động trí tuệ để phán đoán giả thuyết hoặc lời giải cho bài toán 28
1.3.3. Năng lực liên tưởng các đối tượng, quan hệ đã biết với các đối tượng tương tự, quan hệ tương tự 33

1.3.4. Năng lực liên tưởng giữa các đối tượng để phát hiện và giải quyết các tình huống mới 35
1.3.5. Năng lực phát hiện quy luật hay tính chất Toán học nhờ việc sử dụng suy luận quy nạp 36
1.3.6. Năng lực sử dụng ngoại suy để lựa chọn lời giải thích tốt nhất cho vấn đề 39
1.3.7. Năng lực sử dụng biểu diễn Toán học để tìm tòi quy luật hay tính chất Toán học 41
1.4. Các biểu hiện cơ bản của lập luận có căn cứ 42
1.4.1. Năng lực phân tích cấu trúc logic của bài toán. Từ đó người học nhìn giả thiết và kết luận của bài toán theo khía cạnh khác 42
1.4.2. Năng lực thấy được đường lối giải, tìm được lời giải nhờ sơ đồ "phân tích đi xuống" 43
1.4.3. Năng lực xác định được căn cứ ở mỗi bước lập luận trong lời giải bài toán của học sinh 44
1.4.4. Năng lực kiểm tra, đánh giá lời giải các bài toán dựa vào các quy tắc suy luận 46
1.4.5. Năng lực tìm các phản ví dụ để bác bỏ mệnh đề 47
1.5. Phạm vi sử dụng phán đoán và lập luận có căn cứ trong dạy học hình học ở trường trung học phổ thông 48
1.5.1. Dạy học khái niệm 50
1.5.2. Dạy học định lý 52
1.5.3. Dạy học giải bài tập 55
1.6. Thiết kế phán đoán 61
1.6.1. Các nguyên tắc của thiết kế phán đoán 61
1.6.2. Thiết kế của phán đoán 62
KẾT LUẬN CHƯƠNG 1 64
CHƯƠNG 2. KHẢO SÁT NGHIÊN CỨU 65
2.1. Mục đích của khảo sát 65
2.2. Đối tượng tham gia khảo sát 65
2.3. Cách thức tổ chức khảo sát 65
2.4. Công cụ khảo sát 66
2.5. Thời gian khảo sát 66
2.6. Thu thập dữ liệu và các tiêu chí đánh giá 67
2.6.1. Thu thập dữ liệu 67
2.6.2. Các tiêu chí đánh giá cho các bước của quá trình phán đoán có căn cứ 67
2.7. Kết quả khảo sát 71
2.7.1. Kết quả trả lời bảng hỏi của giáo viên 71
2.7.2. Kết quả thảo luận và bài làm của học sinh qua các buổi khảo sát 72

2.8. Những khó khăn học sinh thường gặp khi tiến hành hoạt động phán đoán và xây dựng giả thuyết 80
KẾT LUẬN CHƯƠNG 2 81
CHƯƠNG 3. BIỆN PHÁP BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC PHÁN ĐOÁN VÀ LẬP LUẬN CÓ CĂN CỨ CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC 82
3.1. Biện pháp 1: Tạo tình huống để học sinh phán đoán trong dạy học hình học nhờ suy luận quy nạp và tương tự 83
3.1.1. Mục đích của biện pháp 83
3.1.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp 83
3.1.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp 84
3.1.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp 94
3.2. Biện pháp 2: Tạo các tình huống để học sinh phán đoán trong dạy học hình học nhờ sử dụng khái quát hóa 94
3.2.1. Mục đích của biện pháp 94
3.2.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp 95
3.2.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp 95
3.2.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp 101
3.3. Biện pháp 3: Tạo các tình huống để học sinh phán đoán trong dạy học hình học nhờ sử dụng suy luận ngoại suy 101
3.3.1. Mục đích của biện pháp 101
3.3.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp 102
3.3.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp 102
3.3.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp 106
3.4. Biện pháp 4: Đề xuất các tình huống để người học phán đoán trong dạy học hình học nhờ sử dụng biểu diễn Toán học 106
3.4.1. Mục đích của biện pháp 106
3.4.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp 106
3.4.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp 106
3.4.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp 109
3.5. Biện pháp 5: Luyện tập cho học sinh biết lựa chọn tiền đề đúng cho hoạt động giải quyết vấn đề 109
3.5.1. Mục đích của biện pháp 109
3.5.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp 110
3.5.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp 110
3.5.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp 114

3.6. Biện pháp 6: Luyện tập cho học sinh có thói quen kiểm tra, đánh giá duyệt lại các bước lập luận. So sánh cách giải quyết vấn đề khác nhau để cho cùng một kết quả..... 114
3.6.1. Mục đích của biện pháp 114
3.6.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp 114
3.6.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp 115
3.6.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp 119
3.7. Biện pháp 7: Tạo cơ hội để học sinh lập luận có căn cứ cho học sinh nhờ xem xét giả thiết và kết luận của bài toán dưới khía cạnh khác nhau 119
3.7.1. Mục đích của biện pháp 119
3.7.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp 119
3.7.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp 119
3.7.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp 125
KẾT LUẬN CHƯƠNG 3 126
CHƯƠNG 4. THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM 127
4.1. Mục đích, yêu cầu, nội dung thực nghiệm 127
4.1.1. Mục đích 127
4.1.2. Yêu cầu 127
4.1.3. Nội dung thực nghiệm 127
4.2. Thời gian, quy trình và phương pháp thực nghiệm sư phạm 128
4.2.1. Thời gian thực nghiệm sư phạm 128
4.2.2. Quy trình tổ chức thực nghiệm sư phạm 129
4.2.3. Phương pháp thực nghiệm sư phạm 129
4.3. Tiến trình thực nghiệm sư phạm 131
4.3.1. Thực nghiệm sư phạm vòng 1 (Năm học 2013 - 2014) 131
4.3.2. Thực nghiệm sư phạm vòng 2 (Năm học 2014 - 2015) 137
4.4. Phân tích kết quả kiểm chứng qua việc điều tra giáo viên và học sinh về quá trình thực nghiệm sư phạm 143
KẾT LUẬN CHƯƠNG 4 144
KẾT LUẬN 145
DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ ĐÃ CÔNG BỐ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN ĐỀ TÀI LUẬN ÁN 147
TÀI LIỆU THAM KHẢO 148
PHỤ LỤC

DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 2.1. Thời gian khảo sát 66
Bảng 2.2. Các tiêu chí phân tích tương ứng cho mỗi bước PĐ có căn cứ nhờ quy nạp ... 67
Bảng 2.3. Các tiêu chí phân tích tương ứng cho mỗi bước PĐ có căn cứ nhờ SL tương tự ... 69
Bảng 2.4. Các tiêu chí phân tích tương ứng cho mỗi bước PĐ có căn cứ theo con đường khái quát hóa 70
Bảng 2.5. Các tiêu chí phân tích tương ứng cho mỗi bước xây dựng giả thuyết của một bài toán 71
Bảng 2.6. HS của nhóm 1 trình bày PĐ cho phiếu học tập số 1 73
Bảng 2.7. HS của nhóm 2 trình bày PĐ cho phiếu học tập số 1 73
Bảng 2.8. HS của nhóm 3 trình bày PĐ cho phiếu học tập số 1 74
Bảng 2.9. HS một số nhóm trình bày PĐ cho công thức ở trường hợp khái quát 74
Bảng 2.10. Bài làm của một số nhóm dự đoán và kiểm chứng dự đoán cho công thức tính AH 76
Bảng 2.11. Bài làm của một số nhóm PĐ công thức khái quát và kiểm chứng PĐ bằng CM Toán học 77
Bàng 2.12. Bài làm của một số nhóm về xây dựng giả thuyết và kiểm chứng giả thuyết 79
Bảng 4.1. Phân bố điểm kiểm tra chất lượng của nhóm lớp thực nghiệm và đối chứng trước thực nghiệm vòng 1 132
Bảng 4.2. Bảng xử lý số liệu thống kê của hai nhóm trước khi thực nghiệm vòng 1 132
Bảng 4.3. Kết quả số liệu thống kê của hai nhóm trước khi thực nghiệm vòng 1 133
Bảng 4.4. Phân bố điểm của lớp thực nghiệm và đối chứng sau thực nghiệm vòng 1 ... 134
Bảng 4.5. Phân bố tần số luỹ tích hội tụ lùi của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 1 135
Bảng 4.6. Bảng xử lý số liệu thống kế của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 1 135
Bảng 4.7. Kết quả số liệu thống kê của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 1 136
Bảng 4.8. Phân bố điểm kiểm tra chất lượng của hai nhóm trước thực nghiệm vòng 2 137
Bảng 4.9. Bảng xử lý số liệu thống kê của hai nhóm trước thực nghiệm vòng 2 138
Bảng 4.10. Kết quả số liệu thống kê của hai nhóm trước thực nghiệm vòng 2 139
Bảng 4.11. Phân bố điểm của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2 140
Bảng 4.12. Phân bố tần số luỹ tích hội tụ lùi của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2 140
Bảng 4.13. Bảng xử lý số liệu của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2 141
Bảng 4.14. Kết quả số liệu thống kê của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2 142

DANH MỤC SƠ ĐỒ, BIỂU ĐỒ

Sơ đồ 1.1. Sơ đồ minh họa cho việc thêm vào tiền đề còn thiếu 29
Sơ đồ 1.2. Quá trình SL ngoại suy 40
Sơ đồ 1.3. Sơ đồ "phân tích đi xuống" 43
Sơ đồ 1.4. Mô tả việc tìm tòi lời giải của bài toán theo "phân tích đi xuống" 44
Sơ đồ 1.5. Sơ đồ minh họa mối quan hệ giữa PĐ và phản ví dụ 47
Sơ đồ 3.1. Sơ đồ quy trình khái quát hóa 95
Biểu đồ 4.1. Đa giác đồ của lớp thực nghiệm và lớp đối chứng trước thực nghiệm vòng 1 132
Biểu đồ 4.2. Đồ thị biểu diễn đường tần suất luỹ tích hội tụ lùi của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 1 135
Biểu đồ 4.3. Đa giác đồ biểu thị điểm kiểm tra chất lượng của hai nhóm trước thực nghiệm sư phạm vòng 2 138
Biểu đồ 4.4. Đồ thị biểu diễn đường tần suất luỹ tích hội tụ lùi của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2 141

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong cuộc sống hằng ngày, con người vẫn thường xuyên dự đoán. Nhìn lên bầu trời âm u, đầy mây, người ta thường nói: "chắc là trời sắp mưa", đây chính là một dự đoán. Nhưng dự đoán này không đảm bảo sự chắc chắn, nó có thể đúng hoặc sai. Vì thế sau khi dự đoán người ta cố gắng đi tìm lý lẽ hợp lý và nhiều bằng chứng để thuyết phục rằng dự đoán của mình đúng. Toán học cũng vậy, nó không chỉ đơn giản là thực hiện tính toán một cách máy móc hay lắp các con số vào công thức nào đó. Vậy, các khái niệm và định lý Toán học được hình thành như thế nào? Yếu tố nào đã góp phần thúc đẩy công việc nghiên cứu của các nhà Toán học? Họ đã trải qua những giai đoạn nào trước khi đến với CM các giả thuyết Toán học?

Khi người học tiếp cận với Toán học thì nó đã được trình bày một cách thống nhất, hoàn chỉnh với các bước CM thuần túy. Tuy nhiên, trước khi các nhà Toán học tìm cách CM một định lý hay tìm ra định nghĩa hoặc khái niệm nào đó thì họ đã phải trải qua các hoạt động PĐ nó, trước khi họ tiến hành CM một định lý nào đó thì họ đã phải PĐ về các ý của CM. Kết quả sáng tạo của nhà Toán học là SL CM, là CM; nhưng người ta tìm cách CM lại nhờ SL có lý, nhờ dự đoán [15, tr. 5]. Hay theo quan điểm của Nickerson [59], mỗi định lý được sinh ra như là một sự dự đoán. Do vậy, Polya đã khẳng định rằng: "Tất nhiên chúng ta sẽ học CM, nhưng chúng ta cũng sẽ học cả dự đoán nữa" [15, tr.5]. Quan điểm của Polya về PĐ và CM là: "Bạn phải PĐ ý của CM trước khi tiến hành CM chi tiết. Bạn phải đối chiếu các kết quả quan sát được và suy ra những điều tương tự, bạn phải thử đi thử lại". Như thế PĐ đã phát triển NL CM của người học. Phát triển ý tưởng của Polya thì Mason, Burton, và Stacey đã lập luận rằng: "Đặc biệt hóa, khái quát hóa, PĐ và lý lẽ là các thành phần của tư duy GQVĐ". PĐ là khâu cần thiết của việc GQVĐ [52]. Hơn thế nữa, PĐ còn giúp HS nâng cao sự hiểu biết về khái niệm, định lý. Việc GV đưa hoạt động PĐ trong DH khái niệm, định lý sẽ giúp HS đi tìm nguồn gốc của khái niệm, tìm được mối liên hệ giữa khái niệm, định lý cần học với khái niệm, định lý đã biết.

Dạy và học môn Toán không chỉ đơn thuần trang bị cho HS những kiến thức và kỹ năng của môn học mà hơn thế nữa thông qua các hoạt động học để hướng tới

việc phát triển các hoạt động trí tuệ, chẳng hạn: Phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự, khái quát hóa, đặc biệt hóa, ... Việc GV đưa PĐ trong các hoạt động dạy và học sẽ đảm bảo việc phát triển một số hoạt động trí tuệ nói trên. Khi HS PĐ giả thuyết hay các ý CM của bài toán, người học đã phải sử dụng nhuần nhuyễn các thao trí tuệ để đạt được các yêu cầu của PĐ.

Toán học có nhiều khía cạnh khác nhau. Nhiều HS xem học Toán như là tập hợp các quy tắc để rồi áp dụng một cách cứng nhắc. Hơn nữa, rất nhiều GV áp đặt kiến thức cho HS dẫn đến người học có thói quen ỷ lại, làm theo quy trình sẵn có và lười tư duy để rồi sau khi đánh giá xong các em quên hết những kiến thức đã học. Việc GV bồi dưỡng cho HS NLPĐ sẽ giúp các em đến với môn Toán một cách tự nhiên đồng thời khắc sâu những kiến thức mà các em được học, các em tìm thấy được những mối quan hệ của hệ thống những kiến thức Toán, khám phá những điều mới thông qua hoạt động PĐ của mình. Đây là những yếu tố rất cần thiết để các em rèn luyện và phát triển NL Toán học.

Hiện nay ở các trường THPT, GV đã đưa các PPDH tích cực vào quá trình dạy và học của mình, chẳng hạn như PPDH kiến tạo, PPDH phát hiện và GQVĐ, PPDH khám phá, ... Chúng có cùng nổi bật lên ý tưởng là DH cách phát hiện vấn đề và DH cách GQVĐ. Vì vậy, việc GV bồi dưỡng NLPĐ cho HS cũng nhằm hướng các em tiếp cận với các PPDH tích cực kể trên cũng như tiếp cận với việc phát triển NL Toán học. Song song với việc rèn luyện NLPĐ cho HS, GV cần rèn luyện LLCCC cho người học nữa. Hai hoạt động này không đứng độc lập mà có quan hệ chặt chẽ với nhau. Nếu PĐ mà không có căn cứ thì PĐ thiếu độ tin cậy và không được thừa nhận. Ngược lại, nếu LLCCC mà người học không trải qua PĐ thì dẫn đến tình trạng DH mang tính áp đặt, một chiều. Đây là thực trạng của dạy và học ở các trường THPT hiện nay.

Trong chương trình môn Toán ở trường THPT, HH là nội dung quan trọng góp phần hoàn thiện tri thức Toán học phổ thông cũng như phát triển tư duy cho HS. Khi học nội dung này, HS ở trường THPT khó tiếp thu do kiến thức trừu tượng, khả năng SL HH của các em còn hạn chế và chưa chặt chẽ, trí tưởng tượng trong không gian của người học còn mờ nhạt và chưa thích ứng với sự thay đổi từ HH phẳng sang

HH không gian. Việc GV rèn luyện NLPĐ và LLCCC là con đường để giúp HS khắc phục được những vấn đề đó. Từ đó, các em thấy được sự phát triển của HH cũng như tính lịch sử, tính kế thừa của nó và hình thành thói quen SL chặt chẽ. Hơn thế nữa, các em còn được bồi dưỡng tư duy sáng tạo, tư duy biện chứng, cách GQVĐ, phương pháp kiến tạo,... thông qua các hoạt động PĐ của mình. Ngược lại, nội dung HH cũng chứa đựng những yếu tố thích hợp để bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong quá trình DH.

Khi dạy giờ bài tập HH, đa số GV thường đưa ra các bài toán và yêu cầu HS CM bài toán đó bằng phương pháp diễn dịch, điều này dẫn đến HS học HH một cách thụ động, hiểu nội dung bài học không sâu sắc và các em có tâm lý rất ngại học môn này. Việc GV đưa hoạt động PĐ trong bài dạy của mình đã giúp các em tiếp cận bài học một cách chủ động, tạo cơ hội cho các em sáng tạo các bài tập theo NL của từng em. PĐ của HS có thể đúng hoặc sai vì thế sau khi các em PĐ kiến thức mới thì các em cũng phải quay lại SL diễn dịch để CM PĐ của mình đúng hay sai. Như thế, việc rèn luyện NLPĐ không tách rời với SL CM, LLCCC. Nói cách khác nó như là hoạt động giúp các em tiếp cận bài học một cách tự nhiên, giúp các em bồi dưỡng NL sáng tạo và khả năng quan sát, giúp các em hình thành cho mình thái độ học tập tích cực, chủ động và yêu thích môn học trước khi các em đến với việc rèn luyện SL CM trong quá trình học HH ở trường THPT. GV cũng nên hướng cho HS có thói quen và có ý thức sử dụng những quy tắc suy đoán như xét tương tự, khái quát hóa, quy nạp, ngoại suy, quy lạ về quen,...đồng thời GV nên rèn luyện cho HS luôn có thói quen kiểm tra các tiền đề đúng trong mỗi bước lập luận, tìm các căn cứ trong cách GQVĐ của mình.

Từ những lý do trên nên chúng tôi lựa chọn đề tài nghiên cứu là:

"*BỒI DƯỠNG CHO HỌC SINH NĂNG LỰC PHÁN ĐOÁN VÀ LẬP LUẬN CÓ CĂN CỨ TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG*"

2. Tổng quan các vấn đề nghiên cứu

G.Polya cho rằng giải quyết bài toán và PĐ bài toán là hai hoạt động quan trọng của Toán học. Ông đã đưa ra các ví dụ phân tích quá trình PĐ thông qua vai trò đặc biệt hóa và tổng quát hóa trong các hoạt động Toán học [15]. Polya cho

rằng: Nét đặc trưng CM bài toán và đi tìm bài toán là: CM bài toán là phải xác nhận được kết luận, phát biểu không có bất kỳ sự mơ hồ nào, hoặc đúng hoặc sai. Sự xác nhận của nó gồm có hai phần: Giả thuyết được đi cùng với từ "nếu" và kết luận được đi cùng với từ "thì". Một ví dụ minh chứng cho điều này là: "Hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến d của (P) và (Q) vuông góc với mặt phẳng (R)" được phát biểu theo mệnh đề dưới đây:

"Nếu hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến d của (P) và (Q) vuông góc với mặt phẳng (R)" [9].

Còn đi tìm bài toán hoặc xây dựng bài toán có mục tiêu là đi tìm khách thể nào đó, nó thỏa mãn điều kiện của bài toán bởi sự kết nối dữ liệu và không biết được. Nếu chúng ta phát biểu lại ví dụ trên như sau:

"Nếu giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q) vuông góc với mặt phẳng (R) thì liệu (P) và (Q) có cùng vuông góc với mặt phẳng (R) hay không?" thì nó chưa đảm bảo sự chắc chắn và chỉ là PĐ mà thôi.

PĐ được xem là xương sống trong việc học Toán và nghiên cứu Toán. Tầm quan trọng của nó đã được Polya khẳng định từ lâu thông qua những câu chuyện về lịch sử Toán học được viết trong cuốn sách "Toán học và những SL có lý" [15]. Bên cạnh SL hình thức thì những SL không hình thức như trực giác, khoảnh khắc "lóe sáng bất chợt", ...luôn đồng hành với các nhà Toán học trên hành trình khám phá kiến thức mới [59]. Nói tóm lại, phần lớn công việc của nhà Toán học không phải chỉ là tìm kiếm đường lối CM cho những mệnh đề đã được phát biểu sẵn có [47]. Tuy nhiên Battista và Clements lại khẳng định: "Hầu hết phương pháp dạy Toán của GV và cách trình bày trong SGK làm cho chúng ta tin rằng Toán học chỉ có các CM và suy diễn dựa trên hệ tiên đề. Bởi lẽ, các định lý, quy tắc, hệ quả, và CM của chúng thường được giới thiệu như là các sản phẩm sẵn có" [48]. Cách dạy này dẫn đến một kết quả tiêu cực: Nhiều HS chủ yếu dựa vào GV và SGK để xác định tính đúng/sai của một phát biểu Toán học nào đó.

Một số nhà khoa học giáo dục khác đã có nhiều đóng góp có ý nghĩa về nghiên cứu PĐ, đó là: Fischbein (1987), Arzarello (1998), Mason (2002), Furinghetti và Paola (2003) và Bergqvist (2005). Fischbein (1987) đã xem xét PĐ như là sự biểu

diễn của tri giác [43]. Còn Mason (2002) đã chứng tỏ được tầm quan trọng của "môi trường PĐ". Môi trường PĐ đã khuyến khích người học tìm các ví dụ và phản ví dụ để hỗ trợ cho PĐ, nó tạo cơ hội để người học điều chỉnh PĐ cũng như mở rộng PĐ của mình [56]. Công trình của Arzarello (1998) [36], Furinghetti và Paola (2003) [43] đã nghiên cứu về vai trò của "môi trường HH động" dùng để hỗ trợ cho việc PĐ của HS. Arzarello nghiên cứu việc sử dụng các phần mềm "HH động" để tạo môi trường khám phá các bài toán HH, PĐ, kiểm chứng và xác minh tính đúng đắn của PĐ [36]. Furinghetti và Paola phân tích quá trình HS tìm ra những PĐ và kiểm chứng PĐ của mình bằng môi trường "HH động", sự ảnh hưởng của sự thay đổi nhận thức từ tri giác đến trừu tượng [44]. Tác giả Bergqvist (2005) [38] đã phân tích làm thế nào để xác minh PĐ và làm thế nào để GV tin rằng nó có liên hệ đến quy trình thực hiện. Tác giả John M. Gillis (2005) đã hoàn thành công trình nghiên cứu với tên đề tài: "Nghiên cứu PĐ của HS trong môi trường HH tĩnh và động". Trong nghiên cứu của mình tác giả đã thiết kế "môi trường HH tĩnh và động" để giúp HS PĐ. HS tạo ra PĐ trong "môi trường HH tĩnh" được dùng để so sánh với PĐ trong "môi trường HH động" nhờ việc sử dụng các phần mềm HH [48].

Một số công trình nghiên cứu về PĐ đến từ các nước Úc, Canada, Tây Ban Nha và Ucraina (được tổng hợp trong nghiên cứu của Canadas và các cộng sự [39]) nhằm trả lời những câu hỏi sau đây:

+ Có những loại PĐ nào và PĐ bao gồm những giai đoạn nào?

+ Với bài toán nào thì có thể đưa vào để phát triển loại nào của PĐ?

+ Làm thế nào để chúng ta mô tả đặc trưng của NL của mỗi loại PĐ?

Canadas và nhóm cộng sự của mình muốn đề cập đến những vấn đề có liên quan đến các câu hỏi sau đây [39]:

+ Làm thế nào để GV có thể dạy HS tạo PĐ?

+ Vì sao hầu hết các GV không đẩy mạnh hoạt động PĐ trong giờ dạy trên lớp?

+ Chướng ngại vật nào trong quá trình GV và HS dạy và học PĐ là gì?

Đề cập đến các loại PĐ, các giai đoạn PĐ và làm thế nào bài toán có thể được phát triển nhờ PĐ thì Canadas và nhóm cộng sự của ông đã tổng hợp một số loại PĐ quen thuộc trong nghiên cứu của giáo dục Toán; đó là: PĐ nhờ quy nạp từ

một số hữu hạn các trường hợp riêng lẻ, PĐ nhờ phép tương tự, PĐ nhờ ngoại suy và PĐ dựa vào tri giác của vấn đề [39].

Nhóm nghiên cứu Fou - Lai Lin (2006) cho rằng các hoạt động PĐ có thể giúp nâng cao sự thành thạo của việc học Toán [50]. Công trình của Kilpatrick và công sự (2001) [49] đã đề xuất năm thành phần:

Thứ nhất: Nói đến sự thấu hiểu các khái niệm, phép toán cũng như các mối quan hệ giữa các khái niệm;

Thứ hai: Đề cập đến những kỹ năng trong việc thực hiện các quy trình một cách linh hoạt, chính xác, hiệu quả và hợp lý;

Thứ ba: Nói đến dự đoán có vai trò kích thích sự phát triển của NL chiến lược; NL phát biểu, NL trình bày và GQVĐ của HS. Khi đứng trước vấn đề, nếu chưa hình dùng được nó là gì thì điều đầu tiên cần làm là phát biểu lại vấn đề sao cho có thể áp dụng Toán học để giải quyết. Do đó HS có thể đưa ra hàng loạt dự đoán về đường lối giải rồi sau đó dần đi vào lời giải cốt lõi của vấn đề bằng các hoạt động trí tuệ;

Thứ tư: Đề cập đến khả năng tư duy logic, giải thích và biện minh. Khi HS đưa ra PĐ, điều quan trọng là các em cần kiểm chứng xem dự đoán đó đúng hay không. Trường hợp dự đoán sai thì chỉ cần một phản ví dụ là đủ để bác bỏ PĐ;

Thành phần cuối cùng là mô tả xu hướng tìm kiếm về mặt ý nghĩa của Toán học, nghĩ về Toán học như là môn học hữu ích, có niềm tin rằng mọi sự nỗ lực trong việc học Toán sẽ được đền bù xứng đáng với bản thân người học. Khi tham gia vào các nhiệm vụ của PĐ, HS có cơ hội để phát triển dần dần khả năng nghiên cứu khoa học. Các em sẽ phải mò mẫm, quan sát, đối chiếu kết quả, vận dụng các kiến thức có trước để GQVĐ đặt ra. So với việc phải CM một kết quả nào đó "từ trên trời rơi xuống" thì việc CM một kết quả mà các em PĐ sẽ củng cố niềm tin vào bản thân người học. Ngoài ra, việc kiểm chứng tính đúng đắn của PĐ giúp cho các em cảm nhận vẻ đẹp và ý nghĩa của Toán học. Từ đó các em sẽ xây dựng thái độ tích cực khi học môn Toán.

Tuy nhiên ở hầu hết các nghiên cứu kể trên đều thiếu sự rõ ràng cho những điều được thảo luận được chính xác như thế nào, PĐ được GQVĐ chính xác ra sao và làm thế nào để PĐ được đề nghị liên hệ với các tình huống phổ biến trong giáo

dục Toán. Như thế, rõ ràng PĐ và GQVĐ là hai hoạt động có liên quan mật thiết với nhau, nhưng các công trình nghiên cứu chưa thể hiện rõ nét điều đó. Mặt khác, không phải tất cả các vấn đề đều dẫn đến PĐ và các bài toán khác nhau thì dẫn đến các loại PĐ khác nhau.

Ở trong nước, tác giả Nguyễn Văn Lộc (1992) [22] đã nghiên cứu về LLCCC với tên đề tài: "Hình thành kỹ năng LLCCC cho HS đầu cấp ở trường phổ thông cơ sở Việt Nam thông qua DH HH". Tác giả nghiên cứu về việc xác định nội dung và phương pháp hình thành kỹ năng LLCCC cho HS trên cơ sở tôn trọng chương trình, SGK và kế hoạch DH hiện hành để DH HH ở trường trung học cơ sở. Công trình của tác giả nhấn mạnh vai trò quan trọng của các kỹ năng phân tích cấu trúc logic của định nghĩa, khái niệm, của mệnh đề HH, của SL Toán học. Công trình nghiên cứu hướng đến định hình các kỹ năng LLCCC cơ bản và mối quan hệ giữa chúng.

Tác giả Nguyễn Đình Hùng (1996) đã nghiên cứu những biểu hiện của tư duy logic của HS trong học tập môn Toán ở bậc trung học cơ sở, đó là: Năng lực sử dụng một số yếu tố logic cần thiết trong SL và CM Toán học để rút ra kết luận trực tiếp từ những tiền đề; Năng lực khái quát hóa, đặc biệt hóa cùng với các hoạt động trí tuệ liên quan trong giải toán và xây dựng hệ thống câu hỏi và bài tập theo hướng bồi dưỡng tư duy logic cho HS dựa trên các năng lực đặc trưng của tư duy logic [11].

3. Mục đích nghiên cứu

+Làm sáng tỏ một số biểu hiện cơ bản của NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT;

+ Đề xuất các biện pháp bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS trong DH HH ở trường THPT.

4. Đối tượng nghiên cứu, khách thể nghiên cứu và phạm vi nghiên cứu

4.1. Đối tượng nghiên cứu

NLPĐ và LLCCC của HS trong DH HH ở trường THPT cùng với các biện pháp sư pháp nhằm bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS THPT.

4.2. Khách thể nghiên cứu

Quá trình DH HH ở trường THPT (tập trung nhiều vào nội dung DH HH không gian ở trường THPT).

4.3. Phạm vi nghiên cứu

Bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS thông qua các biện pháp sư phạm trong DH HH ở một số trường THPT trên địa bàn thành phố Hà Nội.

5. Giả thuyết khoa học

Trên cơ sở đặc trưng môn học, đặc điểm nhận thức của HS và yêu cầu đổi mới PPDH, nếu đề xuất được những biện pháp sư phạm theo hướng bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở bậc THPT thì sẽ giúp tăng cường khả năng sáng tạo, tính tích cực, chủ động và khả năng SL của HS khi học môn Toán nói chung và môn HH nói riêng.

6. Câu hỏi nghiên cứu

6.1. Đề tài dựa trên cơ sở khoa học nào để xác định các biểu hiện cơ bản của NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT?

6.2. Phạm vi sử dụng hoạt động PĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT là gì?

6.3. Cơ sở khoa học nào để xác định các hoạt động thành phần của cấu trúc hoạt động PĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT?

6.4. Quy trình DH nhằm giúp HS PĐ và LLCCC bao gồm các bước cơ bản nào?

7. Phương pháp nghiên cứu

7.1. Nhóm phương pháp nghiên cứu lý luận

Nghiên cứu nguồn tài liệu từ sách, giáo trình, tạp chí, Internet,...về phương pháp luận nghiên cứu khoa học, tâm lý học nhận thức, triết học, logic học, nội dung dạy môn HH ở trường THPT, NL PĐ phát hiện tri thức trong DH HH ở trường THPT.

7.2. Nhóm phương pháp nghiên cứu thực tiễn

Khảo sát những trải nghiệm của HS được thể hiện thông qua việc tiếp cận các tình huống DH theo định hướng tìm hiểu NLPĐ và LLCCC của HS;

7.3. Phương pháp thực nghiệm sư phạm: Kiểm nghiệm tính khả thi nhằm hoàn thiện các biện pháp được đề xuất.

8. Những đóng góp của Luận án

8.1. Về mặt lý luận

- Luận án hệ thống hóa một số vấn đề về PĐ và LLCCC;
- Xây dựng một số biện pháp bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS trong quá trình DH môn HH ở trường THPT theo hướng tăng cường tính tích cực cho người học.

8.2. Về mặt thực tiễn

- Các biện pháp đưa ra nhằm hướng đến nâng cao chất lượng dạy và học HH ở các trường THPT theo hướng tăng cường tính tích cực cho người học;
- Các ví dụ đưa vào thực nghiệm sư phạm là tài liệu tham khảo để GV ở các trường THPT bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho người học.

9. Những vấn đề đưa ra bảo vệ

9.1. Các biểu hiện cơ bản về NLPĐ và LLCCC của HS trong DH HH ở trường THPT.

9.2. Tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp nhằm bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS thông qua DH môn HH ở trường THPT.

10. Cấu trúc Luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, khuyến nghị, phụ lục và danh mục tài liệu tham khảo, Luận án gồm bốn chương:

Chương 1: Cơ sở lý luận.

Chương 2: Khảo sát nghiên cứu.

Chương 3: Biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT.

Chương 4: Thực nghiệm sư phạm.

CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LÝ LUẬN

1.1. Một số khái niệm liên quan đến phán đoán

1.1.1. Phán đoán

Theo nghĩa thông thường, nói đến PĐ là nói đến phỏng đoán, ước đoán, dự đoán. Vì vậy, tư duy trong trường hợp này là tư duy đang trong quá trình vận động, chưa được định hình. Do đó, nó chưa được xác định cả về đối tượng ở phẩm chất nhất định cũng chưa phản ánh một cách chắc chắn là chân thực hay giả dối, tức là chưa xác định về mặt giá trị logic của nó.

Một vài khái niệm về PĐ được phát biểu như sau:

PĐ là hình thức logic của tư duy, trong đó các khái niệm được liên kết với nhau để khẳng định hay phủ định một dấu hiệu nào đó của đối tượng. PĐ vừa có chức năng nhận thức, nhận định lại vừa có chức năng dự báo [7, tr.71].

PĐ là một hình thức của tư duy trong đó khẳng định một dấu hiệu nào đó thuộc hay không thuộc về một đối tượng [33, tr.11]. Trong tư duy, PĐ được hình thành bởi hai phương thức chủ yếu là trực tiếp và gián tiếp. Theo phương thức trực tiếp thì PĐ diễn đạt kết quả nghiên cứu của quá trình tri giác một đối tượng. Còn theo phương thức gián tiếp thì PĐ được hình thành thông qua SL.

Chúng tôi đồng ý với quan điểm rằng PĐ là hình thức của tư duy để khẳng định hay phủ định một thuộc tính nào đó thuộc về đối tượng tư duy và PĐ có thể đúng hoặc sai vì thế để khẳng định PĐ là đúng thì chúng ta phải kiểm chứng PĐ bằng các quy tắc SL.

Trong các tài liệu liên quan đến PĐ, các tác giả đã có sử dụng một số thuật ngữ liên quan với PĐ như dự đoán, phỏng đoán, tiền đề, giả thuyết,...các thuật ngữ này về cơ bản có liên quan đến PĐ.

1.1.2. Dự đoán

Theo Từ điển Tiếng Việt của tác giả Hoàng Phê: "Dự đoán có nghĩa là khả năng đoán trước tình hình, sự việc nào có thể xảy ra" [13, tr. 269].

Theo các tác giả Mason, Burton và Stacey cho rằng: "Dự đoán là môt ý kiến, một nhận định có lý nhưng tính đúng đắn của nó thì vẫn chưa được kiểm chứng; hoặc đi đến một kết luận, một quan điểm ... từ những chứng cứ không đầy đủ" [52]. Polya đã đưa ra nhiều ví dụ mô tả quá trình dự đoán bao gồm khái quát hóa, đặc biệt hóa và tương tự. Khái quát hóa chuyển từ việc nghiên cứu tập hợp đối tượng đã cho đến việc

nghiên cứu tập hợp lớn hơn, bao gồm tập hợp ban đầu. Đặc biệt hóa là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho sang việc nghiên cứu tập hợp nhỏ hơn chứa trong tập hợp đã cho. Tương tự là một kiểu giống nhau nào đó, nhưng ở mức độ xác định hơn và ở mức độ được phản ánh bằng khái niệm [15, tr.18-19].

Nói về dự đoán, tác giả Đào Văn Trung có viết: "Dự đoán là một phương pháp tư tưởng được ứng dụng rộng rãi trong nghiên cứu khoa học. Đó là căn cứ vào các nguyên lý và sự thật đã biết để nêu lên những hiện tượng và quy luật chưa biết hay dự đoán là sự nhảy vọt từ giả thiết sang kết luận" [32, tr. 242].

1.1.3. Giả thuyết

1.1.3.1. Khái niệm

Có nhiều định nghĩa khác nhau về giả thuyết của các tác giả sau đây [54]:

Theo Kerlinger (năm 1956) cho rằng "giả thuyết là một mệnh đề phỏng đoán về mối quan hệ giữa hai hay nhiều biến số";

Theo Macleod Clark và Hockey L (1981) thì giả thuyết là phát biểu hoặc sự giải thích được đề xuất bởi sự quan sát hoặc tri thức nhưng chưa được CM, chưa được kiểm chứng";

Giả thuyết được định nghĩa như là lời giải thử nghiệm của vấn đề nghiên cứu, một kết quả nghiên cứu có thể thực hiện được hoặc một phỏng đoán về kết quả nghiên cứu. (Sarantakos (1993)).

Theo tác giả Vũ Cao Đàm (1999) [5, tr.53] thì giả thuyết khoa học còn gọi là giả thuyết nghiên cứu, là một nhận định sơ bộ, một kết luận giả định về bản chất sự vật, do người nghiên cứu đưa ra để CM hoặc bác bỏ. Như vậy, xét trong cấu trúc logic của nghiên cứu thì giả thuyết nằm ở vị trí luận đề. Để CM hoặc bác bỏ giả thuyết cần phải có các luận cứ và luận chứng.

Như thế, về mặt logic, giả thuyết được trình bày dưới dạng một PĐ. Giả thuyết là một ý tưởng được đề xuất như là một sự giải thích có lý cho một tình trạng hoặc tình huống cụ thể nhưng chưa được CM là đúng.

1.1.3.2. Thao tác để đưa ra giả thuyết

a. Bản chất logic của giả thuyết

Xét về bản chất logic học, giả thuyết là một PĐ. Như vậy, giả thuyết phải được viết dưới dạng một PĐ nghĩa là giả thuyết có cấu trúc logic chính là cấu trúc một PĐ.

b. Thao tác logic để để đưa ra giả thuyết

Để đưa một giả thuyết, người nghiên cứu cần được quan sát, phải phát hiện được vấn đề. Đặt giả thuyết chính là đi tìm câu trả lời cho câu hỏi được đặt ra. Xét về bản chất logic, quá trình liên kết, chắp nối các sự kiện, các số liệu thu thập được từ trong quan sát, thực nghiệm để đưa ra một giả thuyết chính là quá trình SL: SL diễn dịch, SL quy nạp, loại suy. [5, tr. 61]

1.1.4. Năng lực phán đoán

1.1.4.1. Năng lực

NL là một thuộc tính quan trọng của nhân cách con người. Từ lâu khái niệm NL trở thành đối tượng nghiên cứu của nhiều nhà khoa học, tuy hiện vẫn còn một số vấn đề chưa được thống nhất cao nhưng bản chất của khái niệm này đã được các nhà tâm lý học và giáo dục học làm sáng tỏ.

Theo từ điển tiếng Việt định nghĩa: "NL là phẩm chất tâm lý và sinh lý tạo cho con người khả năng hoàn thành một loại hoạt động nào đó với chất lượng cao" [13, tr.661]. Còn theo tâm lý học: "NL là tổ hợp các thuộc tính độc đáo của cá nhân, phù hợp với những yêu cầu của một hoạt động nhất định, đảm bảo cho hoạt động đó có kết quả" [28, tr.178].

Về đặc điểm của NL, tác giả John Erpenbeck cho rằng: "NL được tri thức làm cơ sở, được sử dụng như khả năng, được quy định bởi giá trị, được tăng cường qua kinh nghiệm và được thực hiện hóa qua chủ định" [3, tr.21].

Điểm qua một số quan niệm trên về NL chúng ta có thể nhận định rằng: "NL chỉ nảy sinh và quan sát được trong hoạt động giải quyết những yêu cầu mới mẻ do đó nó gắn liền với tính sáng tạo tuy có khác nhau về mức độ" [1, tr.10]. Chúng tôi đồng ý với quan điểm về NL: "NL là khả năng thực hiện một hoạt động nhất định nào đó của con người và NL được hình thành, phát triển, có thể quan sát được trong hoạt động giải quyết những yêu cầu đặt ra".

1.1.4.2. Năng lực phán đoán

Xuất phát từ cách hiểu về các khái niệm về NL, PĐ, dự đoán, giả thuyết, chúng tôi hình dung NLPĐ trong hoạt động học Toán của HS như sau: "NLPĐ là NL hoạt động của chủ thể tìm ra giả thuyết mới hoặc cách giải cho bài toán dựa trên vốn kiến thức, kinh nghiệm sẵn có". Để có được NLPĐ, HS cần được rèn

luyện các NL thuộc phạm trù NL tư duy tiền lôgic và NL tư duy biện chứng. Đó là các NL xem xét các đối tượng Toán học, các quan hệ Toán học trong mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng, nắm được mối quan hệ nhân quả, cần có các thao tác tư duy như: So sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hoá, khái quát hoá,... và năng lực liên tưởng các đối tượng, quan hệ đã biết với các đối tượng tương tự, quan hệ tương tự. Mức độ NLPĐ liên quan chặt chẽ với các phẩm chất của NL tư duy sáng tạo, NL tư duy lôgic, NL tư duy phê phán, NL tư duy biện chứng, NL GQVĐ,...

Trong quá trình DH, GV nên quan tâm rèn luyện cho HS có thói quen quan sát, tìm tòi và dự đoán. Tuy việc dự đoán, tìm tòi đúng là có tốn thời gian, nhưng "sẽ được đền bù nhanh chóng khi tư duy độc lập của HS đã được phát triển"

1.1.5. Phân biệt giữa phán đoán – dự đoán – giả thuyết

- **PĐ với giả thuyết**

Giống nhau:

Cả hai đều là phát biểu dựa trên quan sát và dường như đây là phát biểu đúng nhưng không được CM và kiểm chứng.

Khác nhau:

G. Polya và L.Bowden đã giải thích trong cuối sách "Phương pháp Toán học trong khoa học" [46], hai ông cho rằng PĐ và giả thuyết khác nhau ở mức độ tin cậy mà giải thích dựa trên nó. Giả thuyết có thể được kiểm chứng và lời giải thích dựa trên cơ sở chấp nhận được. Còn PĐ được đề xuất dựa trên cơ sở "không xác định" và đôi khi nó chưa được kiểm tra đầy đủ.

PĐ không như giả thuyết, nó luôn được sử dụng trong Toán học, còn giả thuyết được sử dụng cho mọi lĩnh vực. Nếu PĐ được CM là đúng thì nó là định lý. Tuy nhiên ranh giới giữa hai thuật ngữ này vẫn còn chưa rõ ràng, đôi khi chúng được sử dụng như những từ đồng nghĩa. Ví dụ trong Toán học có PĐ được gọi là "giả thuyết Riemann" mà chính xác nên gọi là "PĐ Riemann".

- **PĐ với dự đoán**

PĐ có cấu trúc logic, dựa trên căn cứ nào đó để khẳng định hay phủ định một dấu hiệu nào đó của đối tượng. Còn dự đoán không có cấu trúc logic, dự đoán chỉ là phỏng đoán, không có căn cứ vì thế mức độ tin cậy của dự đoán thấp hơn PĐ.

1.1.6. Mối liên hệ giữa phán đoán và giải quyết vấn đề

Canadas cùng các cộng sự của ông đã chỉ rõ: GQVĐ và PĐ là hai hoạt động Toán học gắn bó với nhau vô cùng chặt chẽ [39]. Tuy nhiên, không phải loại vấn đề nào cũng là mảnh đất màu mỡ cho PĐ nảy sinh. Theo phân loại của Yevdokimov [39] thì có vấn đề đóng và vấn đề mở. Một vấn đề được gọi là đóng nếu đã cho sẵn hai tập hợp gồm các tính chất rồi yêu cầu CM một tập hợp này là hệ quả của tập hợp kia. Vấn đề đóng theo cách xác định này tương tự với vấn đề CM trong phân loại của Polya. Tác giả Yevdokimov đã mô tả ba đặc điểm để nhận dạng một vấn đề mở như sau: (1) vấn đề cho biết các tính chất ban đầu và yêu cầu tìm hệ quả của chúng; (2) vấn đề cho biết các tính chất hệ quả và yêu cầu tìm các tính chất ban đầu; (3) vấn đề không cho sẵn tính chất nào cả và yêu cầu tìm các tính chất có liên quan. Loại vấn đề mở này tương tự với loại vấn đề tìm tòi theo cách phân loại của Polya. Nhìn chung, so với vấn đề đóng hay vấn đề CM thì vấn đề mở hay vấn đề tìm tòi là không quen thuộc đối với HS Việt Nam [4]. Tuy nhiên chúng có thể gợi lên tình huống đa dạng cho việc dự đoán, từ đó giúp phát triển SL Toán học cho các em [37], [39]. Mặc khác, theo như quan điểm của De Villier thì GV nên sử dụng và thay đổi luân phiên giữa vấn đề tìm tòi và vấn đề CM một cách hợp lý [57].

Còn trong một cuốn sách về tập cho HS làm quen dần với nghiên cứu Toán học nhà toán học Nguyễn Cảnh Toàn đã khuyên rằng: "...bạn có thể gặp những trường hợp dự đoán sai; khi đó cứ bình tĩnh điều chỉnh dự đoán, thậm chí thay hẳn hướng dự đoán. Nhiều khi phải thay đổi hướng dự đoán đến mấy lần mới tìm ra hướng đúng. Đó là một sự thử thách lòng tin vào quy luật phát triển biện chứng của khoa học, một lòng tin làm cơ sở cho sự kiên trì, nhẫn lại. Cuối cùng khi đã có nhiều chắc chắn là dự đoán đúng thì vẫn phải CM dự đoán mới dám khẳng định. CM này thường thuận lợi vì quá trình dự đoán và kết quả dự đoán đã soi sáng hướng CM" [31, tr.58].

1.2. Các khái niệm liên quan đến lập luận có căn cứ

1.2.1. Suy luận

SL hay suy lí là một hình thức cơ bản của tư duy đang nhận thức, nó xuất phát từ những PĐ đã biết để rút ra PĐ mới. PĐ đã biết gọi là tiền đề, PĐ mới rút ra gọi là kết luận của SL, cách thức rút ra kết luận từ tiền đề gọi là là lập luận.

- **Cấu trúc của SL**: SL bao gồm hai thành phần cơ bản: Thứ nhất các PĐ xuất phát, gọi là tiền đề; thứ hai là PĐ mới được rút ra gọi là kết luận.

- **Hình thức biểu diễn**: Mỗi SL được biểu diễn dưới dạng một mệnh đề kéo theo mà tiền đề là một mệnh đề hoặc hội của nhiều mệnh đề: $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B$ (Các A_i là tiền đề (i=1,2,...n), B là kết luận)

Điều kiện cần và để SL đạt tới kết luận chân thực là phải xuất phát từ tiền đề chân thực và quá trình SL phải đúng đắn, nghĩa là phải tuân theo quy luật và quy tắc logic hình thức [29, tr. 50-51].

1.2.2. Lập luận có căn cứ

Lập luận là sắp xếp lí lẽ một cách có hệ thống để trình bày, nhằm CM cho một kết luận về một vấn đề. Căn cứ là "dựa vào", "làm cơ sở" để lập luận hoặc hành động. Các căn cứ của lập luận là các tiên đề, định lý, tính chất, hệ quả, định nghĩa đã biết, các giả thiết đã cho của bài toán.

Kỹ năng LLCCC là kỹ năng xây dựng và trình bày lí lẽ dựa trên các điều kiện đã biết thông qua việc sử dụng các quy tắc, quy luật logic theo mẫu ở dạng ẩn tàng.

Trong DH Toán việc rút ra kết luận dựa vào các LLCCC trên cơ sở vận dụng các quy tắc SL, các luật logic ở dạng ẩn tàng. Các căn cứ của lập luận là các tiền đề, định lý, tính chất, hệ quả, định nghĩa đã biết, các giả thiết đã cho của bài toán.

Kỹ năng LLCCC trong giải toán HH là một kỹ năng HH, sự hình thành kỹ năng LLCCC cho HS bao gồm:

+ Sự thông báo cho HS kiến thức về phương thức hành động lĩnh hội và phát triển tri thức;

+ Sự tập luyện ứng dụng tự lực các phương thức hành động đó vào các điều kiện cụ thể, bao gồm cả việc tự kiểm tra các hành động. Dựa vào kết quả hoạt động thực hành của HS, chúng ta thấy được sự hiện diện các kỹ năng LLCCC ở HS. [22, tr. 13]

* ***Mối quan hệ giữa PĐ và LLCCC***

PĐ và LLCCC không đứng độc lập với nhau mà chúng có mối quan hệ chặt chẽ với nhau. PĐ tìm ra cách GQVĐ, tìm ra các tiền đề cho mỗi bước lập luận. Ngược lại, LLCCC kiểm tra, duyệt lại các tiền đề đó có đúng không; đánh giá QTSL được sử dụng trong lời giải bài toán. Hai hoạt động này bổ trợ cho nhau trong quá trình tìm đoán lời giải và kiểm chứng lời giải.

1.2.3. Suy diễn

Suy diễn hay còn gọi là SL diễn dịch là loại SL có hai thuộc tính cơ bản: Thứ nhất, xuất phát từ những tiền đề khái quát; thứ hai, kết luận rút ra một cách tất yếu.

Tùy thuộc vào tính chất của PĐ tiền đề để phân loại suy diễn nhất quyết, hay có điều kiện hoặc lựa chọn.

Suy diễn là loại SL trong đó kết luận là tri thức riêng, có tính cụ thể hơn được rút ra từ sự liên kết những tri thức chung hơn, có tính khái quát hơn.

Như thế chúng ta có thể hiểu:

Suy diễn là SL theo một quy tắc thỏa mãn điều kiện: Nếu tiền đề đúng thì kết luận đúng. Ký hiệu: $\frac{A}{B}$

Trong Toán học, thường gặp hai loại suy diễn sau đây:

Loại thứ nhất: $\frac{(\forall x \in X)P(x), a \in X}{P(a)}$ tức là nếu P(x) đúng với mọi $x \in X$ và $a \in X$ thì P(a) là mệnh đề đúng.

Loại thứ hai: $\frac{(\forall x \in X)P(x) \Rightarrow Q(x), P(a)}{Q(a)}$ tức là nếu $P(x) \Rightarrow Q(x)$ đúng với mọi $x \in X$ và $P(a)$ đúng thì $Q(a)$ cũng là một mệnh đề đúng [29, tr.51].

1.2.4. Suy luận có lý và suy luận "nghe có lý"

Theo tác giả Polya [15, tr.4-5] thì SL có lý là SL bấp bênh, phải tranh cãi và có điều kiện. Mọi cái mới mà chúng ta hiểu biết về thế giới có liên hệ với SL có lý. Những tiêu chuẩn của SL có lý rất linh động. Hai kiểu SL có lý và SL CM không mâu thuẫn nhau mà bổ sung cho nhau. Trong SL chặt chẽ, điều chủ yếu phân biệt CM với dự đoán, CM có căn cứ với dự đoán không có căn cứ. Trong SL có lý, điều chủ yếu là phân biệt dự đoán hợp lý với dự đoán ít hợp lý hơn. Nếu bạn chú ý hơn cả hai sự khác nhau đó thì cả hai SL này trở thành rõ ràng hơn.

SL "nghe có lý" (còn gọi là SL quy nạp) là SL trong đó kết luận chỉ dựa trên cảm tính, PĐ, không theo một quy tắc suy diễn nào cả. Kết luận rút ra chỉ có tính chất dự đoán, giả thuyết. Loại SL này không thể được xem là một phép CM ngay cả khi tiền đề là đúng vì nó không là SL hợp logic (không dựa trên một quy tắc SL nào), tuy nhiên nó cung cấp cho ta những giả thuyết mà sự phát triển của Toán học là nhờ những giả thuyết. Đã gọi là giả thuyết thì có thể đúng có thể sai. Để chỉ ra giả thuyết đó là đúng, ta cần phải có một phép CM. Để chỉ ra giả thuyết đó sai ta cần chỉ ra phản ví dụ.

Mặc dù "SL nghe có lý" không được coi là CM nhưng nó có tác dụng trong việc DH Toán vì giúp GV hướng dẫn HS quan sát, nhận xét và đưa ra những dự đoán, giả thuyết để đi đến định lý sẽ học.

Như vậy, về cơ bản SL có lý và SL "nghe có lý" giống nhau; đó là SL dùng để hỗ trợ cho việc PĐ các giả thuyết, dự đoán cách CM, tìm các ý của CM trước khi CM chi tiết. các dạng SL có lý và SL "nghe có lý" thường gặp là: Phép tương tự, phép khái quát hóa, tổng quát hóa, phép quy nạp không hoàn toàn,...[15] [29, tr. 52] và ngoại suy cũng được xem là SL "nghe có lý". Đây là các SL không được xem là SL CM, nó chỉ là phát biểu chưa đủ độ tin cậy vì thế muốn khẳng định đây là mệnh đề đúng thì chúng ta quay lại sử dụng SL CM.

Hai kiểu SL CM và SL "nghe có lý" có mối quan hệ chặt chẽ với nhau:

+ Muốn có cái gì để CM thường phải có PĐ, có giả thuyết mà điều này thì có thể dựa vào quy nạp không hoàn toàn, tương tự,.. qua những đối tượng cụ thể.

Ngược lại, những mệnh đề có được qua SL "nghe có lý" phải qua SL để CM tính đúng đắn của nó.

1.2.4.1. Quy nạp không hoàn toàn

Khái niệm: SL quy nạp không hoàn toàn là loại SL quy nạp, trong đó kết luận về một dấu hiệu chung cho lớp đối tượng nào đó được rút ra dựa trên cơ sở chỉ khảo sát một số đối tượng của lớp ấy. [7, tr.134]

Giá trị của SL quy nạp không hoàn toàn: Trong SL quy nạp không hoàn toàn kết luận rút ra có thể giả dối hoặc chân thực. Kết luận giả dối khi khái quát vội vàng, tùy tiện, chỉ dựa vào dấu hiệu riêng lẻ, bề ngoài, không bản chất của các sự vật, hiện tượng. Còn kết luận đúng đắn với xác suất cao khi dựa vào những dấu hiệu chung, bản chất có tính quy luật chi phối sự tồn tại, phát triển của sự vật, hiện tượng ấy. Vì vậy những kết luận của SL quy nạp không hoàn toàn có tính định hướng quan trọng cho hoạt động nghiên cứu khoa học và hoạt động thực tiễn của con người. Nó trở thành cơ sở cho các dự báo, các giả thuyết khoa học [7, tr.135]

Quy nạp Toán học [33, tr. 46]: Xuất phát từ tiên đề về thứ tự trong tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$, người ta đưa ra phương pháp CM một mệnh đề dựa trên nguyên lý quy nạp gồm ba bước:

Bước 1: CM mệnh đề đúng với số tự nhiên nhỏ nhất n_0 (đối với mệnh đề đó);

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $k \geq n_0$;

Bước 3: CM mệnh đề đúng với số tự nhiên liền sau *k*.

- *Phân biệt quy nạp không hoàn toàn với quy nạp Toán học*

+ Mệnh đề để CM quy nạp Toán học là mệnh đề đúng, người học chỉ cần CM dựa theo ba bước của phương pháp quy nạp Toán học.

+ Mệnh đề được rút ra từ quy nạp không hoàn toàn chỉ là một dự đoán, chưa biết tính đúng/sai của nó. Để khẳng định mệnh đề đó là đúng người ta dùng QTSL trong đó quy tắc SL quy nạp.

1.2.4.2. Suy luận tương tự

Khái niệm: SL tương tự là loại SL mà trong đó so sánh hai đối tượng giống nhau ở một số dấu hiệu xác định này để rút ra kết luận các đối tượng đó giống nhau ở các dấu hiệu khác. [7, tr.194]

Tương tự là thao tác tư duy dựa trên sự giống nhau về tính chất và quan hệ của những đối tương Toán học khác nhau. [29, tr.22]

Nếu trong SL quy nạp có mức độ khái quát ở tiền đề thấp hơn mức độ khái quát ở kết luận và suy diễn có mức độ khái quát ở các tiền đề cao hơn mức độ khái quát ở kết luận thì trong SL tương tự, mức độ khái quát các tiền đề tương đương với mức độ khái quát ở trong kết luận.

Sơ đồ của SL tương tự: [7, tr.195]

SL tương tự được thể hiện dưới dạng sơ đồ sau đây:

A có dấu hiệu *abcd*

B có dấu hiệu *abc*

Do đó, *B* có thể có dấu hiệu *d*.

Điều cần lưu ý trong SL tương tự là kết luận rút ra có giá trị xác suất. Bởi vì các đối tượng được so sánh, dù chúng có giống nhau như thế nào đi chăng nữa, bao giờ cũng có dấu hiệu khác nhau. Vì vậy, dấu hiệu được rút ra nếu nó phản ánh đúng đặc tính tồn tại trong *B* thì có kết luận chân thực. Còn nếu dấu hiệu *d* là dấu hiệu để phân biệt giữa *B* và *A* thì kết luận trên là giả dối.

Các loại SL tương tự:

Căn cứ vào dấu hiệu được rút ra trong kết luận phản ánh thuộc tính hay quan hệ giữa các đối tượng được so sánh mà người ta chia SL tương tự thành ba loại: SL tương tự về thuộc tính, SL tương tự về quan hệ và SL tương tự theo cấu trúc.

+ *SL tương tự về thuộc tính* là SL tương tự trong đó dấu hiệu rút ra trong kết luận phản ánh thuộc tính của các đối tượng được so sánh.

+ *SL tương tự về quan hệ* là SL tương tự trong đó dấu hiệu rút ra trong kết luận phản ánh quan hệ giữa các đối tượng được so sánh.

+ *SL tương tự theo cấu trúc*: Có những đối tượng khác nhau trong HH phổ thông nhưng khi đã nghiên cứu nội dung HH cao cấp thì ta thấy chúng có chung một cấu trúc. Chẳng hạn: Đường thẳng là siêu phẳng trong mặt phẳng và mặt phẳng là siêu phẳng trong không gian, tam giác là 2- đơn hình, tứ diện là 3-đơn hình, hình bình hành và hình hộp là trường hợp riêng của *m*-hộp, đường tròn và mặt cầu là siêu cầu tương ứng trong mặt phẳng và trong không gian ba chiều...Như vậy, nếu nắm được được cấu trúc cơ bản của đối tượng này, GV có thể hướng dẫn HS suy đoán tương tự từ bài toán HH phẳng sang bài toán trong không gian ba chiều [34].

Giống nhau và khác nhau giữa SL quy nạp không hoàn toàn và SL tương tự:

Giống nhau: Kết luận của nó đều không đáng tin cậy, vì thế không thể sử dụng để CM mệnh đề Toán học, nhưng nó lại là một trong những cách SL có hiệu quả để sáng tạo phát minh. Trong khi dạy Toán chúng ta tận dụng ưu thế này để rèn luyện cho HS biết cách tìm tòi, dự đoán, nêu giả thuyết và sau đó tìm cách CM.

Khác nhau: Phép quy nạp không hoàn toàn rút ra kết luận từ đối tượng riêng biệt, loại riêng biệt trong cùng một loại đối tượng. Còn tương tự rút ra kết luận từ đối tượng (hay loại đối tượng) này sang đối tượng khác.

1.2.4.3. Ngoại suy

Pierce cho rằng ngoại suy là những quy tắc chung được PĐ dựa trên trường hợp đơn lẻ, ví dụ hoặc sự kiện nào đó [35].

Ngoại suy xuất hiện một cách tự nhiên qua lý giải của con người về các hiện tượng hoặc các sự kiện trong đời sống hàng ngày. Có lẽ vì thế mà người ta vẫn còn tranh luận với nhau về nhiều vấn đề xung quanh loại SL này. Cũng giống như quy nạp, ngoại suy có thể dùng để chỉ một kết quả hoặc một quá trình. Ta hiểu kết quả là sự giải thích ngoại suy; còn quá trình là suy dẫn đến sự giải thích ngoại suy đó. Sau đây là ví dụ minh họa cho loại SL ngoại suy do Peirce đề xuất [60]:

Quy luật: Tất cả những hạt đậu trong túi này có màu trắng.

Kết quả: Những hạt đậu nằm ở trên bàn có màu trắng

Trường hợp: Những hạt đậu nằm ở trên bàn là được lấy ra từ chiếc túi này.

Hãy tưởng tượng, một người khi đi làm về thì thấy những hạt đậu màu trắng rơi vãi trên bàn. Người ta cũng biết rằng ở trong bếp có một chiếc túi đựng toàn đậu màu trắng. Vì thế người đó tạm thời đi đến kết luận: Có thể những hạt đậu nằm trên

bàn là được lấy ra từ chiếc túi trong bếp. Hay nói cách khác, người đó vừa thực hiện SL ngoại suy. Có thể có những hạt đậu đó lấy từ nơi khác vì thế *quy luật trong SL ngoại suy có thể không đúng*. Như thế, *quy luật trong SL ngoại suy để đi PĐ, khác với trong suy diễn*.

Theo Paul Thagard, ngoại suy thực chất là một loại SL có dạng "*q*, nếu *p* thì *q*, vì thế có thể *p*" [62]. Tương tự như thế, Peirce đã đề xuất mô hình gồm ba bước để mô tả quá trình SL như sau [35]:

C là một sự kiện gây ngạc nhiên được quan sát

Nếu *A* đúng thì *A* giải thích cho *C*.

Do đó có lý do để tin rằng *A* đúng.

Từ mô hình của Peirce cũng như ví dụ về hạt đậu ta có thể nhận thấy rằng bản chất của ngoại suy là không chắc chắn. Thật vậy, những hạt đậu nằm trên bàn cũng có thể là đã lấy ra từ một nơi khác hoặc do một người nào đó mang từ bên ngoài về.

Một cách tổng quát, ngoại suy là tiến trình suy ra những sự kiện/quy tắc và các giả thuyết để làm cho vấn đề nào đó trở nên có lý, để khám phá và giải thích một hiện tượng/quan sát [55, tr.17-18].

Ví dụ 1.1. Chúng tôi đưa ví dụ minh họa cho ba loại SL: Suy diễn, quy nạp và ngoại suy.

Suy diễn:

Quy luật: Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

Trường hợp: Hình bình hành *ABCD* có một góc vuông.

Kết luận: Hình bình hành *ABCD* là hình chữ nhật.

SL quy nạp:

Trường hợp: Hình bình hành *ABCD* có một góc vuông.

Kết luận: Hình bình hành *ABCD* là hình chữ nhật.

Quy luật: Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

SL ngoại suy:

Quy luật: Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

Kết luận: Hình bình hành *ABCD* là hình chữ nhật.

Trường hợp: Hình bình hành *ABCD* có một góc vuông.

Trong ví dụ trên, suy diễn tìm kiếm kết luận từ những kết quả đúng cho trước; quy nạp tìm kiếm kết quả tổng quát cho các kết quả đúng của những trường hợp riêng. Còn SL ngoại suy tìm kiếm lời giải thích tốt nhất cho những kết quả có

trước. Phép SL ngoại suy như ở ví dụ không đúng về mặt logic hình thức vì có thể xét các trường hợp khác, chẳng hạn như: Hình bình hành *ABCD* có hai đường chéo bằng nhau. Tuy nhiên dạng SL này có thể chứa đựng cách thức mà con người lý giải khi thực hiện khám phá và khảo sát. Ngoại suy tìm kiếm hoặc hình thành các giả thuyết có thể giải thích một sự kiện được quan sát. Vì thế, ngoại suy tạo ra các ý tưởng mới và giúp mở rộng tri thức.

1.2.5. Quy tắc suy luận

1.2.5.1. Định nghĩa

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ là các công thức của lôgíc mệnh đề. Nếu với mọi bộ giá trị chân lý e = ($e_1, e_2, \ldots. e_k$) của các biến mệnh đề có mặt tại ít nhất một trong các A_i hoặc trong B, mỗi khi $A_1(e)=1, A_2(e)=1, \ldots, A_n(e)=1$, ta đều có B(e) = 1, thì ta nói, có một quy tắc SL từ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đến B, khi đó ta viết: $\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$ hoặc đơn giản là $\frac{A_1 A_2 \ldots A_n}{B}$. Các công thức $A_1, A_2, \ldots, A_n$, được gọi là các **tiền đề của SL** còn B được gọi là **hệ quả logic** (hoặc kết luận logic) của các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$. SL từ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rút ra B trong trường hợp này được gọi là **SL hợp logic.**

Viết theo công thức hằng đúng: $\models A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$

1.2.5.2. Một số quy tắc suy luận cơ bản (suy diễn)

Theo [33, tr. 44] thì có một số QTSL cơ bản sau đây:

- ***Các loại tam đoạn luận***

+ Tam đoạn luận khẳng định: $\frac{P \Rightarrow Q, P}{Q}$

+ Tam đoạn luận phủ định: $\frac{P \Rightarrow Q, \overline{Q}}{\overline{P}}$

+ Tam đoạn luận lựa chọn: $\frac{(P \vee Q), \overline{P}}{Q}$

+ Tam đoạn luận bắc cầu: $\frac{(P \Rightarrow Q), (Q \Rightarrow R)}{P \Rightarrow R}$

- ***Quy tắc kết luận từ mệnh đề phổ biến***

$$\frac{(\forall x, P(x)), \text{(a là x)}}{P(a)} \quad \text{hoặc} \quad \frac{(\forall x, P(x) \Rightarrow (Q(x)), \text{(a là x)}}{P(a) \Rightarrow Q(a)}$$

- ***Quy tắc quy nạp***

Để kết luận P(n) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, người ta dùng phép quy nạp như sau:

$$\frac{(P(n_0)=1),\ (\text{nếu } P(k)=1, \forall k \geq n_0, \text{ thì } P(k+1)=1)}{P(n) \text{ đúng với mọi số tự nhiên } n \geq n_0}$$

1.2.6. Chứng minh

1.2.6.1. Khái niệm

CM là phép SL diễn dịch, xuất phát từ mệnh đề đúng làm tiền đề. Trong phép CM, kết luận (được rút ra bằng phép suy diễn và xuất phát từ những tiền đề đúng) bao giờ cũng đúng.

Như vậy, CM là quá trình xác nhận tính đúng đắn hoặc bác bỏ một PĐ nào đó dựa vào các PĐ đã biết.

Cấu trúc của một CM bao gồm ba bộ phận:

+ Luận đề là mệnh đề cần CM

+ Luận cứ là những tiền đề, định nghĩa, định lý đã biết.

+ Luận chứng là những phép SL được sử dụng trong CM. [29, tr.53]

Trong DH môn toán, CM có vai trò quan trọng trong việc phát triển tư duy cho HS. Thông qua CM, HS sẽ học và rèn luyện được cách PĐ, cách SL. Nhiều hoạt động trí tuệ được nảy sinh trong quá trình CM như phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự, ... [29, tr.53]

1.2.6.2. Phương pháp chứng minh

a. CM trực tiếp

CM trực tiếp một mệnh đề nào đó là tìm cách suy ra mệnh đề đó trực tiếp từ các mệnh đề đã biết (tiên đề, định lý) [12, tr.135]

- **Phép tổng hợp**

Sơ đồ: $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow X$ với X là mệnh đề phải CM, các mệnh đề A_1, A_2, ...A_n là mệnh đề đã biết, giả thiết.

Đây là phép CM có trình bày gọn gàng, chặt chẽ và hệ thống. Do đó phép CM thường được sử dụng để trình bày trong SGK. Tuy nhiên, về phương diện sư phạm thì phép CM này thiếu tự nhiên, HS không hiểu lý do vì sao lại bắt đầu từ A_1. Hơn nữa, sử dụng phương pháp này, GV phải giảng giải nhiều nên HS ít có điều kiện phát triển tư duy.

- **Phép phân tích**: Có hai loại phân tích.

+ **Phân tích đi lên** (phương pháp giật lùi):

Sơ đồ: $X \leftarrow A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow ... \leftarrow A_n$

Nội dung: Giả sử muốn CM X ta phải CM A_1, muốn CM A_1 ta phải CM A_2 ..., muốn CM A_{n-1} ta phải CM A_n, trong đó A_n là điều được khẳng định là đúng thì ta dừng lại và kết luận *X* đúng theo QTSL bắc cầu.

+ Phân tích đi xuống:

Sơ đồ: $X \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow ... \rightarrow A_n$

Nội dung: Ta cần CM X. Từ X ta suy ra A_1, từ A_1 suy ra A_2 ..., từ A_{n-1} ta suy ra A_n. Có hai khả năng:

+ Nếu A_n sai thì ta kết luận *X* sai. Trong trường hợp này phép phân tích đi xuống có tác dụng bác bỏ.

+ Nếu A_n đúng ta chưa có kết luận gì về *X*. Muốn kết luận *X* đúng ta phải đi ngược từ A_n đúng suy ra A_{n-1} đúng, cứ như thế suy ra *X* đúng. Trong trường hợp này ta có phép CM tổng hợp. Phương pháp CM đi xuống có tác dụng giúp ta tìm đường lối CM, tức là tìm mệnh đề A_n đúng làm điểm xuất phát. [12, tr. 135-137]

b. Chứng minh gián tiếp

CM gián tiếp một mệnh đề X nào đó là tìm cách bác bỏ tính chân thật của mệnh đề phủ định của X để suy ra tính chân thật của mệnh đề X. Phép CM gián tiếp thường dùng phép CM phản chứng.

- **CM phản chứng**

CM phản chứng là phép CM trong đó tính chân thực của giả thuyết được CM bằng tính phi chân thực của phản luận đề, tức là giả thuyết đặt ngược lại với giả thuyết ban đầu.

Các bước thực hiện:

+ Giả sử tồn tại $\overline{B}$

+ Lập luận theo quy tắc SL: $\dfrac{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}, \overline{B}}{\overline{A}}$.

+ Không thể có $\overline{A} \cap A$ đúng nên $\overline{B}$ sai. Vậy B đúng.

Ví dụ 1.2. Phân tích CM định lý bằng phương pháp CM phản chứng ở trong SGK HH cơ bản lớp 11 [9, tr.64]: "Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau *a*, *b* và *a*, *b* cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β)".

Xác định giả thiết và kết luận của định lý:

Giả thiết A: "$a \cap b = \{M\}$, $a, b \subset (\alpha)$ và $a // (\beta)$, $b // (\beta)$"

Kết luận B: "$(\alpha) // (\beta)$"

CM bằng phương pháp CM phản chứng:

- Giả sử tồn tại $\overline{B}$: "(α) không song song với (β), tức là chúng cắt nhau theo giao tuyến *c*"
- Kết hợp với giả thiết A ta có:

$$\begin{cases} a // (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow a // c \text{ và } \begin{cases} b // (\beta) \\ b \subset (\alpha) \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow b // c.$$

Vậy từ điểm *M* ta kẻ hai đường thẳng *a, b* cùng song song với *c*.

- Điều này mâu thuẫn với định lý 1 [9; tr. 56]. Nghĩa là tồn tại $\overline{A}$.
- Không thể có $\overline{A} \cap A$ đúng nên $\overline{B}$ sai. Vậy B đúng tức là (α) song song với (β).

1.2.7. Suy luận trong hình học

HH có sự kết nối với các lĩnh vực khác của Toán học và áp dụng khá rộng rãi trong đời sống hàng ngày. HS thường CM các bài toán HH dựa trên SL diễn dịch. Các thành phần cơ bản của SL HH bao gồm:

+ *PĐ về đối tượng HH*: Phân tích các hình dạng và sử dụng SL quy nạp, tương tự về các mối liên hệ giữa các tình huống để tạo nên công thức PĐ.

+ *Xây dựng và đánh giá SL HH*: Phát triển và đánh giá suy diễn (thông thường và không thông thường) về hình dạng và tính chất của chúng để giúp chúng ta có thể hiểu được các bài toán HH.

+ *Sự tiếp cận HH đa dạng*: Phân tích các bài toán HH bởi phép biến đổi, tiếp cận tổng hợp và hệ tọa độ.

+ *Kết nối HH*: Sử dụng ý tưởng HH, sự tưởng tượng trong không gian, những lĩnh vực khác của Toán học để kết nối các đối tượng HH; các quy tắc khác và các tình huống thực tiễn [58].

*** PĐ đối tượng HH**

PĐ là thói quen SL cơ bản trong các câu hỏi Toán học trong đó có môn HH. HH mở ra nhiều cơ hội để phát triển SL thông qua việc kích thích tính tò mò, tính ham hiểu biết về mối liên hệ về tri giác HH hay đo lường HH. HS được PĐ bởi sự

phân tích các hình dạng trong HH phẳng hoặc HH không gian; hoặc bởi sự ngạc nhiên, hứng thú về sự tồn tại của một hình dạng nào đó.

Hoạt động PĐ xuất hiện do tính tò mò muốn đoán biết về một sự vật, hiện tượng nào đó. Không chỉ muốn biết được "điều đó xảy ra như thế nào" mà còn "vì sao điều đó xảy ra" (cách nhìn sâu sắc, sự thừa nhận hoặc sự bác bỏ). Quá trình để tìm kiếm và tạo PĐ mở cho HS nhiều cơ hội để họ đi sâu vào việc tìm hiểu mối quan hệ của các đối tượng Toán học cũng như mài dũa khả năng xác thực một vấn đề nào đó. PĐ một vấn đề mới lạ chính là cho người học cơ hội được học hỏi từ sự khám phá trong tình huống mới đối với họ, khát khao muốn được thay đổi điều gì đó trong thế giới xung quanh. Xa hơn nữa là người học có khả năng tạo dựng "sự kết nối và mô hình hóa HH". Các tình huống tạo cơ hội các em thúc đẩy việc PĐ đã:

(1) cung cấp sự nhận biết, thích thú với tình huống mà HS được trải nghiệm qua việc phân tích các đối tượng Toán học.

(2) Đề cập nhiều phương pháp tiếp cận để khám phá tình huống Toán học cho mục đích tạo ra sự PĐ.

(3) Ấp ủ những khái niệm Toán học một cách thường xuyên [58].

*** Xây dựng và đánh giá các SL HH**

Tạo PĐ là bước đầu tiên trong câu hỏi về Toán học. HS cần đi theo nhiều PĐ của họ với sự nỗ lực để CM PĐ đó là đúng. Mặc dù các PĐ chủ yếu không GQVĐ một cách trực tiếp nhưng hoạt động đó đã dẫn đến phát triển một vài kết quả HH được nảy ra trong vấn đề [58].

1.3. Các biểu hiện cơ bản của năng lực phán đoán

Trong nghiên cứu Toán học, ngoài các CM dựa vào các quy tắc suy diễn đúng đắn và nghiêm ngặt, người ta còn phải thực hiện các thao tác tư duy khác, đặc biệt các dự đoán. Để có một dự đoán có lý, chúng ta thường dựa vào sự quan sát, nhờ vào kinh nghiệm trong các trường hợp tương tự, nhờ vào sự nghiên cứu trong các trường hợp riêng, và có khi nhờ vào trực giác hoặc thậm chí là sự linh cảm,...[2, tr.146].

NLPĐ được hiểu gồm các NL như sau:

- NLPĐ phát hiện vấn đề dựa trên cơ sở các quy luật của tư duy biện chứng, tư duy tiền logic, khả năng liên tưởng và di chuyển liên tưởng;
- NLPĐ các ý trong mỗi bước CM, tìm tòi lời giải bài toán. Tìm tòi lời giải là bước rất quan trọng trong hoạt động giải toán. Điều cơ bản của bước này là biết định hướng đúng để tìm ra được hướng giải bài toán.

1.3.1. Năng lực xem xét các đối tượng Toán học, các mối quan hệ Toán học trong mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng

Triết học chỉ ra rằng cái chung và cái riêng có các mối quan hệ sau đây [26, tr. 48]:

Cái chung chỉ tồn tại trong cái riêng, thông qua cái riêng để biểu hiện sự tồn tại của mình, cái chung không tồn tại độc lập, tách rời với cái riêng. Những thuộc tính, tính chất, các mối liên hệ đúng trong cái chung thì đúng cho mọi cái riêng (xét theo quan hệ nào đó). Ví dụ như: tứ giác là cái chung, hình bình hành là cái riêng, rõ ràng tứ giác có tính chất gì thì hình bình hành cũng đều có tính chất ấy, hơn thế nữa hình bình hành còn có một số tính chất khác mà tứ giác không có, chẳng hạn như là hai cặp cạnh đối của nó song song và bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tính chất của cái riêng phong phú hơn, chẳng hạn như hình chữ nhật, hình vuông có nhiều tính chất phong phú hơn hình bình hành;

Cái riêng chỉ tồn tại trong mối liên hệ đưa tới cái chung; không có cái riêng tồn tại độc lập, tuyệt đối tách rời với cái chung; ví dụ: hình bình hành nằm trong mối quan hệ với tứ giác, đó là loại tứ giác đặc biệt có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau, nó không nằm tách rời với tứ giác. Cái riêng là cái toàn bộ, phong phú và đa dạng hơn cái chung; còn cái chung là cái bộ phận nhưng sâu sắc và bản chất hơn cái riêng;

Ngoài ra, nếu xét về phương diện tập hợp các đối tượng (ngoại diên) thì cái riêng lại nằm trong cái chung, ví dụ: tứ giác là cái chung; hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, …là các cái riêng. Tập hợp các cái riêng ta gọi là tứ giác, như vậy xét về phía phương diện ngoại diên thì cái riêng lại nằm trong cái chung.

Hoạt động PĐ thông qua mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng có thể thực hiện thông qua các hoạt động sau đây [26, tr.49]:

Hoạt động khảo sát tương tác trên một số trường hợp riêng; hoạt động phân tích, so sánh, tổng hợp tìm các mối liên hệ giữa các yếu tố thành phần; hoạt động khái quát hóa rút ra cái chung (hoạt động PĐ); hoạt động kiểm chứng và rút ra tính chất, quy luật chung (nếu đúng) ở các tình huống mới.

Ví dụ 1.3. Ví dụ sau đây minh họa hoạt động PĐ giả thuyết nhờ sử dụng mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng. Sau khi PĐ giả thuyết mới, người học sử dụng SL Toán học để kiểm chứng tính đúng/sai của giả thuyết được xây dựng.

Bước 1: Lựa chọn cái riêng điển hình: Cho tứ diện đều *ABCD*, gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là trung điểm của *CD*, *BC*, *BD*. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của các mặt (*BCD*), (*ACD*), (*ABC*), (*ABD*).

Bước 2: Tìm mối quan hệ giữa các thuộc tính của cái riêng:

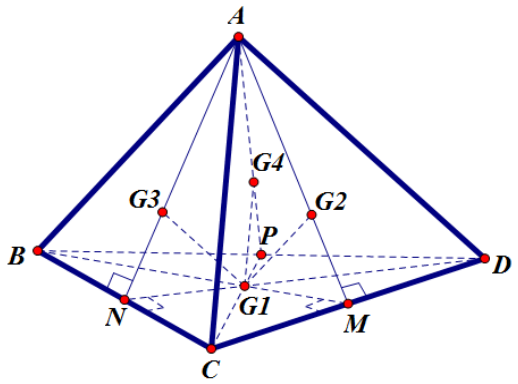
+ Ta có: $G_1G_2 // AB; G_1G_3 // AD; G_1G_4 // AC$ và

$$\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{MG_1}{MB}; \frac{G_1G_3}{AD} = \frac{NG_1}{ND}; \frac{G_1G_4}{AC} = \frac{PG_1}{PC}$$

+ Suy ra:

$$\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{S_{G_1CD}}{S_{BCD}}; \frac{G_1G_3}{AD} = \frac{S_{G_1BC}}{S_{BCD}}; \frac{G_1G_4}{AC} = \frac{S_{G_1BD}}{S_{BCD}}$$

và $\frac{G_1G_2}{AB} + \frac{G_1G_3}{AD} + \frac{G_1G_4}{AC} = 1$



Hình 1.1

Bước 3: Tìm cái chung, cái tổng quát dựa vào mối quan hệ được tìm thấy ở bước 2 được thể hiện ở bảng sau đây:

Cái riêng được chọn	*Cái chung được tìm thấy nhờ nó cũng có các tính chất điển hình của cái riêng*
Tứ diện đều *ABCD*	Tứ diện *ABCD*
G_1 là trọng tâm của (*BCD*)	*O* là điểm bất kỳ trong (*BCD*)
$G_1G_2 // AB; G_1G_3 // AD; G_1G_4 // AC$	Từ *O* kẻ các đường thẳng song song với *AB*, *AD* và *AC* cắt các mặt (*ACD*), (ABC), (ABD) lần lượt tại A', B', C'.
$\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{S_{G_1CD}}{S_{BCD}}; \frac{G_1G_3}{AD} = \frac{S_{G_1BC}}{S_{BCD}}; \frac{G_1G_4}{AC} = \frac{S_{G_1BD}}{S_{BCD}}$	**PĐ**: $\frac{OA'}{AB} = \frac{S_{OCD}}{S_{BCD}}; \frac{OB'}{AD} = \frac{S_{OBC}}{S_{BCD}}; \frac{OC'}{AC} = \frac{S_{OBD}}{S_{BCD}}$
$\frac{G_1G_2}{AB} + \frac{G_1G_3}{AD} + \frac{G_1G_4}{AC} = 1$	**PĐ**: $\frac{OA'}{AB} + \frac{OB'}{AD} + \frac{OC'}{AC} = 1$

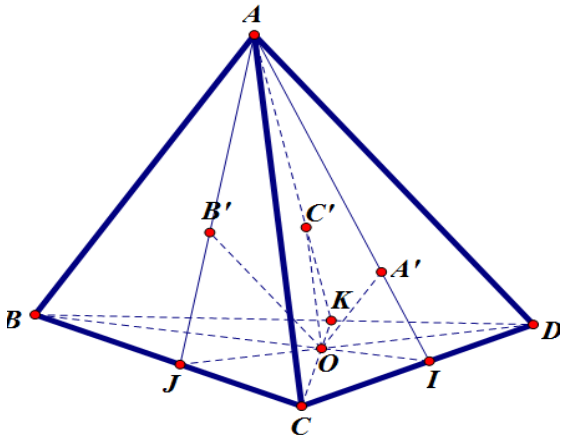
Bước 4: Người học phát biểu bài toán được PĐ:

Cho tứ diện *ABCD*, lấy điểm *O* bất kỳ trong (*BCD*), từ *O* dựng các đường thẳng song song với *AB, AD, AC* cắt (*ACD*), (*ABC*), (*ABD*) lần lượt tại *A*', *B*', *C*'.

a. CMR:

$$\frac{OA'}{AB}=\frac{S_{OCD}}{S_{BCD}};\frac{OB'}{AD}=\frac{S_{OBC}}{S_{BCD}};\frac{OC'}{AC}=\frac{S_{OBD}}{S_{BCD}}$$

b. CMR: $\frac{OA'}{AB}+\frac{OB'}{AD}+\frac{OC'}{AC}=1.$



Hình 1.2

Bước 5: HS kiểm chứng tính đúng/sai của bài toán

Trong (*BCD*) kéo dài *BO* cắt *CD* tại *I* . Trong (*IAB*) kẻ đường thẳng đi qua *O* và song song với *AB* cắt *AI* tại *A*' là giao điểm cần tìm. Tương tự ta cũng có B', C'.

Ta có: $\frac{OA'}{AB}=\frac{IO}{IB}=\frac{OH}{BK}=\frac{\frac{1}{2}OH.CD}{\frac{1}{2}BK.CD}=\frac{S_{OCD}}{S_{BCD}}$ với *H, K* là các chân đường cao kẻ từ *O* và *B* đến cạnh *CD*.

Tương tự ta cũng có: $\frac{OB'}{AD}=\frac{S_{OBC}}{S_{BCD}};\frac{OC'}{AC}=\frac{S_{OBD}}{S_{BCD}}$

Suy ra, $\frac{OA'}{AB}+\frac{OB'}{AD}+\frac{OC'}{AC}=\frac{S_{OCD}}{S_{BCD}}+\frac{S_{OBC}}{S_{BCD}}+\frac{S_{OBD}}{S_{BCD}}=\frac{S_{BCD}}{S_{BCD}}=1$

1.3.2. Năng lực sử dụng các hoạt động trí tuệ để phán đoán giả thuyết hoặc lời giải cho bài toán

1.3.2.1. Phân tích và tổng hợp

Theo tác giả Nguyễn Cảnh Toàn: "Phân tích là chia một chỉnh thể ra thành nhiều bộ phận để đi sâu vào các chi tiết trong từng bộ phận. Tổng hợp là nhìn bao quát lên một chỉnh thể gồm nhiều bộ phận, tìm các mối liên hệ giữa các bộ phận của chỉnh thể và của chỉnh thể đó với môi trường xung quanh" [30, tr. 122].

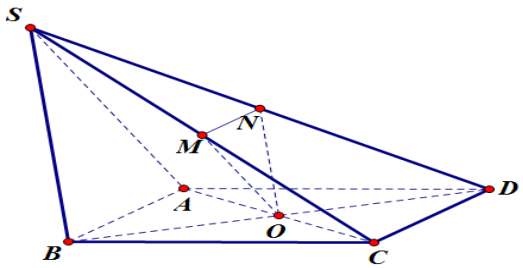
Còn tác giả Hoàng Chúng cho rằng: "Trong mọi khâu của quá trình học tập Toán học của HS, NL phân tích, tổng hợp luôn là yếu tố quan trọng giúp HS nắm vững kiến thức và vận dụng kiến thức một cách sáng tạo" [6, tr. 15].

Phân tích và tổng hợp là hai hoạt động trí tuệ cơ bản của quá trình tư duy. Những hoạt động trí tuệ khác đều diễn ra trên nền tảng của phân tích và tổng hợp.

Một khi HS thành thạo hai thao tác phân tích và tổng hợp là yếu tố thuận lợi để các em hình thành NLPĐ. Chúng tôi hiểu PĐ được hình thành nhờ hoạt động trí tuệ phân tích và tổng hợp chính là việc thêm vào các tiền đề còn thiếu để đi đến kết luận của bài toán. Việc thêm vào các tiền đề ở mỗi em là khác nhau vì NL Toán học của mỗi em khác nhau.

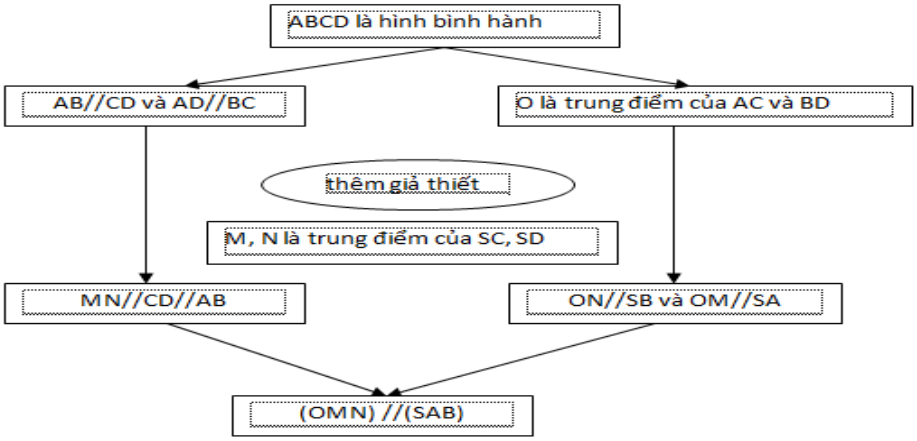
Ví dụ 1.4.

Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình bình hành tâm *O*. Hãy thêm vào giả thiết của bài toán để có được các cặp mặt phẳng song song với nhau?



Hình 1.3

Tùy vào tiền đề được thêm vào mà mỗi em tìm được cặp mặt phẳng song song với nhau. Sơ đồ 1.1 là một ví dụ minh họa cho việc thêm vào tiền đề còn thiếu để HS đi đến kết luận của bài toán nhờ vào hoạt động phân tích.



Sơ đồ 1.1. Sơ đồ minh họa cho việc thêm vào tiền đề còn thiếu

1.3.2.2. So sánh

"So sánh là xem cái này với cái kia để thấy sự giống nhau, khác nhau hoặc sự hơn kém nhau" [29, tr.22]. Muốn so sánh hai sự vật, hiện tượng ta phải phân tích các dấu hiệu, thuộc tính của chúng, đối chiếu các dấu hiệu, các thuộc tính đó với nhau rồi tổng hợp lại xem hai sự vật, hiện tượng có cái gì giống nhau và khác nhau.

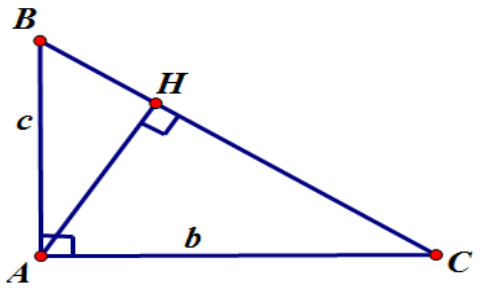
So sánh có hai mục đích: Phát hiện những đặc điểm chung và những đặc điểm riêng khác nhau ở một đối tượng, sự kiện. Mục đích thứ nhất thường dẫn đến tương tự và đi đôi với khái quát hóa. [29, tr.22]. Như thế, để PĐ một đối tượng nào đó có thuộc tính tương tự với đối tượng đã biết thì người học phải sử dụng kỹ năng so sánh, so sánh để tìm thấy những điểm giống nhau giữa hai đối tượng, từ đó có cơ

sở để PĐ rằng một tính chất nào đó thuộc đối tượng thứ nhất thì đối tượng thứ hai cũng có thuộc tính đó.

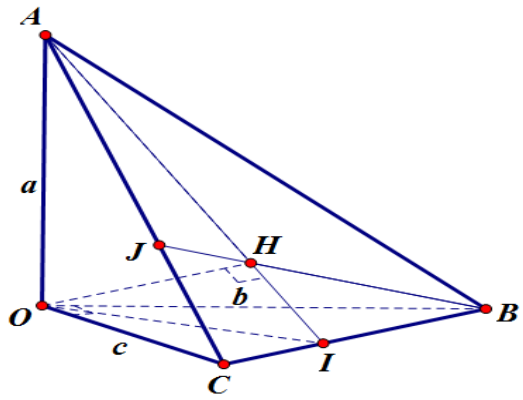
Ví dụ 1.5.

Tam giác *ABC* có *AB, AC* vuông góc với nhau. Gọi *H* là chân đường vuông góc hạ từ *A* tới cạnh *BC*. Ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Cho tứ diện *OABC* có ba cạnh *OA, OB, OC* đôi một vuông góc và $OA=a, OB=b, OC=c$. PĐ công thức tính đường cao *OH*.



Hình 1.4



Hình 1.5

Trước khi HS PĐ công thức tính đường cao *OH* theo *a,b,c* của tứ diện thì người học sử dụng kỹ năng so sánh để phát hiện những điểm giống nhau giữa hai đối tượng. Điểm giống nhau giữa chúng là:

Tam giác *ABC* có hai cạnh *AB, AC* vuông góc với nhau (*AB=c, AC=b*).	Tứ diện *OABC* có ba cạnh *OA, OB, OC* đôi một vuông góc (*OA=a, OB=b, OC=c*).
H là chân đường cao hạ từ đỉnh *A* đến cạnh *BC*	*H* là chân đường vuông góc hạ từ đỉnh *O* tới mặt phẳng (*ABC*)
AH là đường cao của tam giác vuông *ABC*	*OH* là đường cao của tứ diện vuông *OABC*. *OH* là đường cao của tam giác vuông *AOI*.
$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$	***Dự đoán:*** $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

1.3.2.3. Khái quát hóa

Chúng ta có thể tách ra thành hai nhóm hiện tượng cơ bản liên quan đến thuật ngữ khái quát hóa như sau [21; tr.54 -55]:

Tìm kiếm:

Một mặt trong khái quát là diễn ra sự tìm kiếm và khái quát bằng lời các bất biến trong tính đa dạng các sự vật và thuộc tính của chúng. Nếu lưu ý đến quá trình khái quát hóa thì nó chỉ rõ bước chuyển tiếp của chủ thể từ chỗ mô tả các tính chất của từng sự vật đến chỗ phát hiện và tách ra trong nhóm các sự vật tương tự. Ở đây, chủ thể tìm thấy và tách ra các tính chất ổn định, lặp lại của các sự vật đó. Kết quả của quá trình này là chủ thể đã tiến hành trừu xuất khỏi các dấu hiệu có tính bộ phận và hay thay đổi của sự vật.

Nhận dạng:

Mặt khác của khái quát hóa là sự nhận dạng các sự vật thông qua cái bất biến đã được tách ra. Khái quát hóa chính là việc tìm cái chung (cái khái quát) từ một hay một số sự vật, hiện tượng cụ thể, đơn nhất (cái riêng).

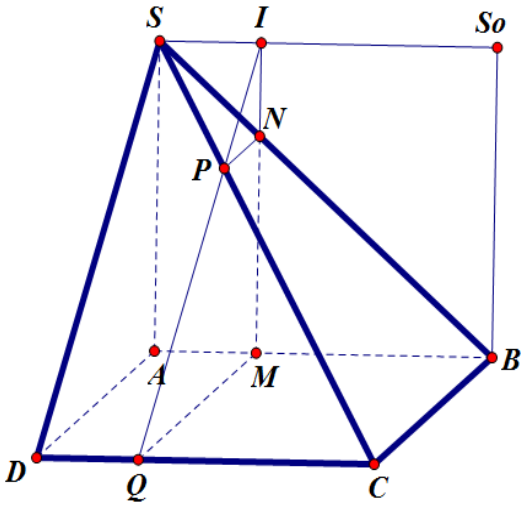
Chúng tôi hiểu *NLPĐ của HS thể hiện ở chỗ đó là khả năng dựa vào việc tìm thấy mối quan hệ của một số trường hợp riêng để PĐ cho trường hợp khái quát.*

1.3.2.4. Đặc biệt hóa

"Đặc biệt hóa là quá trình ngược lại của khái quát hóa, là việc chuyển từ nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho sang nghiên cứu một tập nhỏ hơn chứa trong nó". Khái quát hóa và đặc biệt hóa thường được vận dụng trong tìm tòi và giải toán. Từ một tính chất nào đó, muốn khái quát thành một dự đoán nào đó, trước hết ta phải thử đặc biệt hóa; nếu kết quả của đặc biệt hóa là đúng ta mới tìm cách dự đoán từ khái quát hóa, nếu sai ta dừng lại. [29, tr 24]

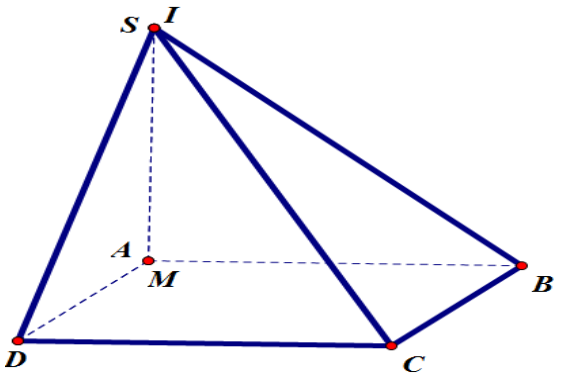
Vai trò của đặc biệt hóa trở nên quan trọng trong trường hợp ta đang có dự đoán nào đó về đối tượng đang xét và ta muốn CM dự đoán đó đúng, nhưng ta chưa tìm ra cách CM. Trong trường hợp đó ta nên sử đụng đặc biệt hóa. Áp dụng dự đoán vào một vài trường hợp đặc biệt, nếu trường hợp này dự đoán là đúng thì dự đoán của ta đáng tin hơn. Còn trái lại, đối với trường hợp đặc biệt đang xét mà dự đoán không đúng thì cố nhiên mọi chuyện kết thúc. [2, tr.155-156].

Ví dụ 1.6. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình vuông. $SA \perp (ABCD)$. Trên cạnh *AB* lấy một điểm *M*. Gọi (α) là mặt phẳng qua *M* và song song với mặt phẳng (*SAD*), cắt *SB*, *SC* và *CD* lần lượt tại *N*, *P*, *Q*. Gọi *I* là giao điểm của MN và PQ. Khi *M* chạy trên đoạn *AB* thì *I* chạy trên đoạn thẳng nào? Dựa vào căn cứ nào mà em kết luận như thế?



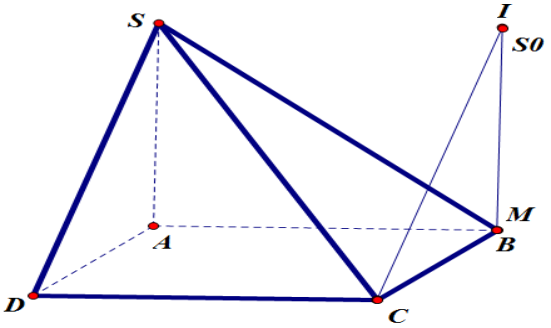
Hình 1.6

+ HS thường gặp khó khăn với bài toán tìm tập hợp điểm. Nhiều GV đưa ra lời giải ngay khiến các em không định hình được vì sao lại có những bước giải như thế. Sử dụng đặc biệt hóa để PĐ điểm *I* chạy trên đoạn thẳng nào giúp các em tìm thấy cách giải quyết của bài toán.



Hình 1.7

+ Xét các trường hợp đặc biệt hóa:
Nếu *M* trùng với điểm *A* thì điểm *I* trùng với điểm *S* (hình 1.7).
Nếu điểm *M* trùng với điểm *B* thì điểm *I* trùng với điểm S_0 (hình 1.8). Lúc đó *N* trùng với điểm *C*.



Hình 1.8

Từ *B* kẻ đường thẳng *d* song song với *SA*, từ *C* kẻ đường thẳng *d'* song song với *SD*, d và d' cắt nhau tại S_0.

+ Từ đó HS có thể dự đoán: Khi *M* chạy trên đoạn *AB* thì *I* chạy trên đoạn thẳng SS_0 chăng?

+ Từ PĐ ở các trường hợp đặc biệt hóa, ta biết được *I* chỉ chạy trên đoạn thẳng SS_0. Mặc khác, $SS_o = (SCD) \cap (SAB)$ và $SS_o // AB // CD$ nên $SABS_0$ là hình chữ nhật. Vậy, $SS_0 = AB = CD$. Với cách phân tích ở trên, ta có thể tìm được cách giải cho bài toán đó.

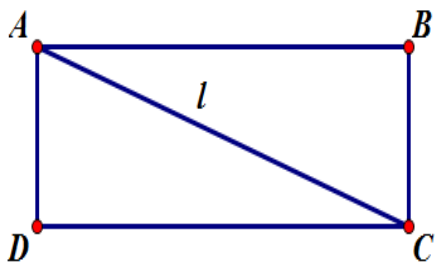
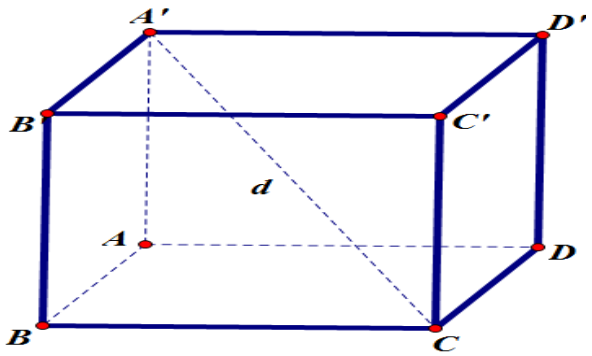
1.3.3. Năng lực liên tưởng các đối tượng, quan hệ đã biết với các đối tượng tương tự, quan hệ tương tự

Một giả thuyết mới có thể được PĐ từ tương tự một cái gì đó đã được biết đến trước đó. Một quy luật chung có thể được PĐ trên cơ sở một quy tắc đã được biết đến [39, tr.59]. Tương tự là một kiểu giống nhau nào đó. Những đối tượng phù hợp với nhau trong những mối quan hệ được quy định là những đối tượng tương tự. Hai hệ là tương tự nếu chúng phù hợp với nhau trong các mối quan hệ xác định rõ ràng giữa những bộ phận tương ứng [15].

PĐ nhờ phép tượng tự rất quan trọng trong việc GQVĐ [39, tr.60]. Vấn đề giải quyết các bài toán tương tự trong môn Toán là khá phổ biến. Trong Toán học, tương tự là SL dựa trên sự giống nhau về tính chất, mối quan hệ giữa các đối tượng Toán học. Hai phép CM tương tự nếu đường lối, phương pháp CM là giống nhau. Hai hình là tương tự nếu có nhiều tính chất giống nhau hay nếu vai trò của chúng giống nhau trong vấn đề nào đó, hay giữa các phần tử tương ứng của chúng có mối quan hệ giống nhau. Nhiều khi trong quá trình mở rộng, những tập hợp đối tượng có những thuộc tính tương tự, từ đó ta suy đoán những tính chất từ tập hợp này sang tập hợp khác [29, tr.22].

Như vậy, NLPĐ nhờ tương tự được hiểu là hoạt động PĐ giả thuyết mới và hoạt động PĐ đường lối CM nhờ tương tự với bài toán đã biết trước đó.

Ví dụ 1.7. PĐ các ý trong mỗi bước CM của bài toán HH không gian nhờ phép tương tự với bài toán trong HH phẳng.

Bài toán: Trong các hình chữ nhật *ABCD* có đường chéo *l* thì hình nào có diện tích lớn nhất?  Hình 1.9	**PĐ bài toán**: Trong các hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'* có đường chéo *d* thì hình nào có diện tích toàn phần lớn nhất?  Hình 1.10

Tìm giả thiết và kết luận của bài toán: **Giả thiết**: Hình chữ nhật *ABCD* có $AC = l$. **Kết luận**: Hình chữ nhật nào có diện tích lớn nhất?	*Xây dựng giả thiết và kết luận của bài toán mới nhờ tương tự:* **Giả thiết**: Hình hộp chữ nhật có $A'C = d$. **Kết luận**: Hình hộp chữ nhật nào có diện tích toàn phần lớn nhất?
Các bước CM của bài toán: + $S = a.b$, trong đó *a,b* lần lượt chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật. + Ta có: $a^2 + b^2 = l^2$ + Sử dụng bất đẳng thức Cô-si để tìm giá trị lớn nhất. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương *a, b* ta có: $ab \le \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow S \le \frac{l^2}{2}$ Giá trị lớn nhất của *S* bằng $\frac{l^2}{2}$ và đạt được khi $a = b = \frac{l}{\sqrt{2}}$. **Kết luận**: Trong các hình chữ nhật có đường chéo *l* thì hình vuông có cạnh bằng $\frac{l}{\sqrt{2}}$ có diện tích lớn nhất.	*PĐ lời giải của bài toán nhờ tương tự với bài toán trong HH phẳng* + $S_{tp} = 2(a.b + bc + ac)$, trong đó *a,b,c* lần lượt chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hình hộp chữ nhật. + Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ +Sử dụng bất đẳng thức Cô-si để tìm giá trị lớn nhất. Áp dụng ba lần bất đẳng thức Cô-si: +Lần 1: Cho hai số dương *a, b* ta có: $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$ (1) + Lần 2: Cho hai số dương *b, c* ta có: $bc \le \frac{b^2+c^2}{2}$ (2) + Lần 3: Cho hai số dương *a, c* ta có: $ac \le \frac{a^2+c^2}{2}$ (3) Lấy (1) + (2) + (3) ta có: $ab + bc + ac \le a^2 + b^2 + c^2$ $\Leftrightarrow ab + bc + ac \le d^2$ $\Leftrightarrow S_{tp} = 2(ab + bc + ac) \le 2d^2$ Giá trị lớn nhất của S_{tp} bằng $2d^2$ và đạt được khi $a = b = c = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

	Kết luận: Trong các hình hộp chữ nhật có đường chéo d thì hình hộp lập phương có cạnh bằng $\frac{d}{\sqrt{3}}$ có diện tích toàn phần lớn nhất.

1.3.4. Năng lực liên tưởng giữa các đối tượng để phát hiện và giải quyết các tình huống mới

Trong từ điển tiếng Việt; tác giả Hoàng Phê (chủ biên) [13] đã giải nghĩa: "Liên tưởng là nhân sự việc, hiện tượng nào đó mà nghĩ tới sự việc, hiện tượng khác có liên quan".

Các mối liên tưởng được hình thành dựa trên bốn quy luật: Quy luật tương tự; quy luật tương phản; quy luật tương cận và quy luật nhân quả [23], trong đó quy luật nhân quả đóng vai trò đặc biệt quan trọng trong tiến trình nhận thức và phát triển trí tuệ của HS [26, tr.59];

+ *Quy luật tương tự*: Ý thức của chúng ta dễ dàng đi từ một ý tưởng này sang một ý tưởng khác. Có thể làm sáng tỏ ý thức của con người dễ dàng đi từ một ý tưởng này sang một ý tưởng khác tương tự.

+ *Quy luật tương phản*: Từ một ý tưởng này liên hệ tới một ý tưởng khác ngược với nó.

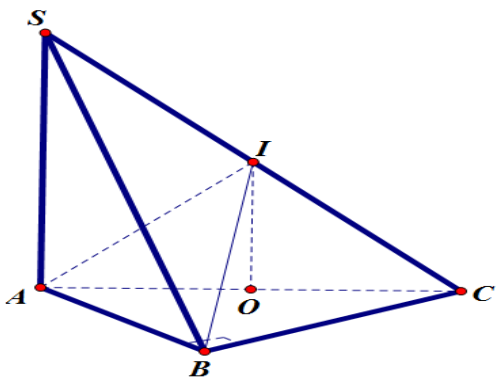
+ *Quy luật tương cận*: Khi nghĩ một vật nào đó, ta có xu hướng nhớ lại các vật khác nhau mà ta đã trải qua ở cùng một thời điểm và cùng một nơi.

+ *Quy luật nhân quả*: Khi có một ý tưởng về kết quả thường xuất hiện các ý tưởng là nguyên nhân dẫn đến kết quả đó [23, tr. 98].

NLPĐ thể hiện ở hoạt động liên tưởng giữa các đối tượng để phát hiện và giải quyết tình huống mới.

Ví dụ 1.8.

Cho hình chóp *S.ABC*, (*ABC*) là tam giác vuông tại *B*. $SA \perp (ABC)$. Xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*. HS thường lúng túng khi giải quyết loại bài toán này vì không biết bắt đầu từ đâu. Việc sử dụng liên tưởng giữa đối tượng này với đối tượng khác giúp HS hình thành các bước để giải bài toán.



Hình 1.11

Sau đây là các câu hỏi minh họa cho việc thiết kế ý tưởng này:

+ GV: Để tìm *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp thì ta xác định *I* như thế nào?

+ HS: Tìm *I* cách đều các đỉnh của hình chóp tức là *IA=IB=IC=IS*

+GV: Trong HH phẳng, nếu tam giác *ABC* vuông tại *B* có *OA =OB =OC* (*kết quả*) thì nó giúp em liên tưởng đến điểm *O* nằm ở vị trí nào của tam giác *ABC*? (*nguyên nhân*) (*quy luật nhân quả*).

+ HS: "Nếu ΔABC vuông tại *B* và *O* là trung điểm của *AC* thì *OA=OB=OC* " (*)

+ GV: Hình chóp *S.ABC* có các mặt nào là tam giác vuông? Vuông tại điểm nào?

+ HS: ΔSAB vuông tại *A*, ΔSBC vuông tại *B*, ΔABC vuông tại *B*, ΔSAC vuông tại *A*.

+ GV: Em hãy áp dụng tính chất (*) cho các tam giác vuông kể trên? Từ đó xác định vị trí tâm *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp?

- ΔSAB vuông tại *A* và nếu *I* là trung điểm của *AB* thì *IA=IB=IS*. Nhận thấy rằng *IB=IS=IC* là không thể (vì tam giác *SBC* vuông tại *B*). Vậy trường hợp này ta loại bỏ. Tương tự ta cũng loại bỏ trường hợp *I* là trung điểm của *AC*.
- ΔSAC vuông tại *A* và *I* là trung điểm của SC thì ta có *IS=IC=IA* (1)
- ΔSBC vuông tại *B* và I là trung điểm của SC thì ta có *IS=IB=IC* (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra *IA=IB=IC=IS*. Như vậy, *I* là trung điểm của *SC* là hợp lý.

Từ đây GV có thể giúp HS xây dựng các bước giải như sau:

+ Gọi *I* là trung điểm của cạnh *SC*.

+ Vì ΔSAC vuông tại *A* và *I* là trung điểm của SC nên ta có *IS=IC=IA* (3)

+ Do ΔSBC vuông tại *B* và *I* là trung điểm của *SC* nên ta có *IS=IB=IC* (4)

+ Từ (3) và (4) ta suy ra *IA=IB=IC=IS*. Vậy, *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*.

1.3.5. Năng lực phát hiện quy luật hay tính chất Toán học nhờ việc sử dụng suy luận quy nạp

Chúng ta có thể PĐ một mệnh đề thông qua việc quan sát một số trường hợp riêng lẻ mà chúng có quan hệ với nhau. Trong một số trường hợp, PĐ đó được CM bởi quy nạp Toán học như là một quy tắc chung được tìm thấy. Nhờ việc sử dụng các thao tác tư duy như: Phân tích, tổng hợp, đặc biệt hóa, khái quát hóa để đưa ra PĐ về đối tượng, quan hệ hay là quy luật trong Toán học. NLPĐ này tương tự với quan điểm của Polya về NL phát minh quy nạp. Phương pháp quy nạp có lợi ích trong việc định hướng và giúp ta PĐ một điều gì đó. Nhưng PĐ thì có thể đúng hoặc sai nên ta phải CM bằng SL Toán học để khẳng định dự đoán.

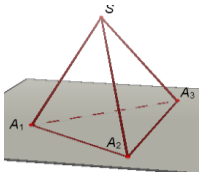
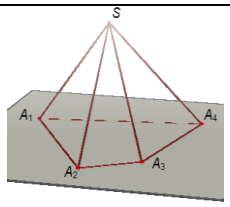
Mức độ thuyết phục của một PĐ (kết luận) được rút ra từ SL quy nạp phụ thuộc vào nguyên tắc nào? Theo quan điểm của nhiều tác giả, câu trả lời là nguyên tắc đa dạng [41]. Các nhà khoa học có khuynh hướng kiểm tra một giả thuyết nào đó thông qua một tập hợp gồm đa dạng các thực nghiệm. Điều này hiệu quả hơn việc tiến hành lặp đi lặp lại một thực nghiệm nào đó hay tiến hành các thực nghiệm gần giống nhau. Nói chung, chúng tôi hiểu nguyên tắc có tính đa dạng như sau: "Mức độ thuyết phục của kết luận được rút ra từ SL quy nạp sẽ càng cao nếu tính đa dạng của các trường hợp riêng lẻ được quan sát càng cao".

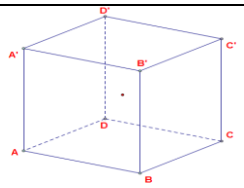
Tuy nhiên, các tác giả Heit, Haln và Feeney [41] thì cho rằng: "Trong quá trình SL quy nạp, con người không chỉ bị chi phối bởi tính đa dạng của các trường hợp riêng được quan sát mà người ta còn chịu ảnh hưởng bởi những trường hợp ngoại lệ, đặc biệt. Hay nói cách khác PĐ từ quy nạp còn mang tính bấp bênh, người thực hiện cần tìm nhiều bằng chứng để làm tăng sức thuyết phục của giả thuyết được tìm ra.

Ví dụ 1.9. Khi mới học về hình đa diện các em nhận xét một cách lờ mờ rằng "Một hình đa diện phức tạp có nhiều mặt, nhiều góc và nhiều cạnh". Nhưng lại ít em đi sâu vào vào nhận xét đó để tìm hiểu thông tin chính xác hơn. Từ việc khảo sát các trường hợp riêng của hình đa diện và kết hợp với sử dụng các thao tác tư duy mà HS có thể PĐ mệnh đề: "*mọi hình đa diện, tổng số mặt và số đỉnh bằng số cạnh cộng thêm 2*" (Công thức Euler).

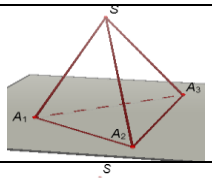
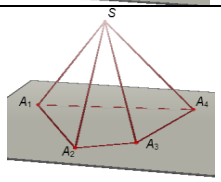
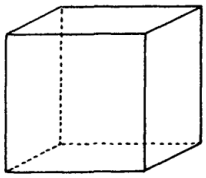
Bước 1: ***Quan sát các trường hợp riêng***

GV cho HS quan sát về số cạnh (C), số mặt (M) và số đỉnh (Đ) của một số hình đa diện quen thuộc mà em đã được học như hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình lập phương. Qua đó các em nhận được các thông tin sau đây:

Hình đa diện	M	Đ	C	Quan sát hình vẽ
Hình chóp tam giác	4	4	6	
Hình chóp tứ giác	5	5	8	

Hình lập phương	6	8	10	

Bước 2: ***Sắp xếp các trường hợp riêng một cách có hệ thống***

Hình đa diện	M	Đ	C	Hình vẽ
Hình chóp tam giác	4	4	**6**	
Hình chóp tứ giác	5	5	**8**	
Hình lập phương	6	8	**12**	

Bước 3: ***Tìm kiếm và PĐ quy luật***

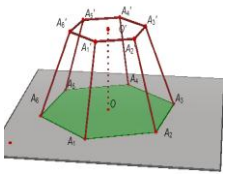
Chúng ta thấy rằng M +Đ thì tăng dần theo C khi chúng ta đọc các cột từ trên xuống dưới. Như thế chúng ta đã tìm kiếm và PĐ được quy luật như sau: "M+ Đ có liên hệ với C". Và nhìn vào tất cả trường hợp riêng thì chúng có liên hệ như sau: "M+ Đ = C+2".

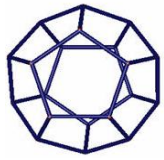
Bước 4: ***Hình thành PĐ***

"Có lẽ M +C và Đ của các hình đa diện có liên hệ với nhau theo quy luật: M+Đ=C+2" nhưng đây chỉ là lời phỏng đoán mà thôi, không chắc chắn về tính đúng đắn của nó.

Bước 5: ***Kiểm chứng PĐ***

Bằng cách chúng ta đưa một số trường hợp khác để "thử nghiệm" xem liệu quy luật đó có còn đúng không? Các trường hợp này đều chưa phải là trường hợp tổng quát. Chẳng hạn:

Hình chóp cụt ngũ giác	8	12	**18**	

Hình mười hai mặt đều	20	12	**30**	
Hình hai mươi mặt đều	20	12	**30**	

Hình chóp cụt: 8+12 = 18+**2**.

Hình mười hai mặt đều: 20+ 12= 30 + **2**.

Hình hai mươi mặt đều: 20 + 12= 30+**2.**

Như thế, giả thuyết M+Đ = C +2 được xác nhận trong cả 3 trường hợp này.

Bước 6: ***Khái quát hóa PĐ***

Hình đa diện	M	Đ	C
Hình chóp có *n* mặt bên	*n*+ 1	*n* + 1	2 *n*
Hình lăng trụ có *n* mặt bên	*n* +2	2 *n*	3 *n*
Hình chóp cụt có *n* mặt bên	*n* +2	2 *n*	3 *n*

Hình chóp có *n* mặt bên: (n+ 1)+(n + 1)= 2n +**2**; Hình lăng trụ có *n* mặt bên: (n+2) + 2n = 3n +**2**; Hình chóp cụt có *n* mặt bên: (n+ 2)+ 2n= 3n +**2.**

Nhờ những sự xác nhận ở trên, PĐ trên trở nên càng có lý hơn. Chúng ta có thể đi đến một giả thuyết rằng không phải chỉ trong những trường hợp đã xét, mà trong "*mọi hình đa diện, tổng số mặt và số đỉnh bằng số cạnh cộng thêm 2".*

1.3.6. Năng lực sử dụng ngoại suy để lựa chọn lời giải thích tốt nhất cho vấn đề

Pierce cho rằng một quy trình SL tổng quát có thể tiến hành như sau:

Ngoại suy đề xuất một lý thuyết; sử dụng suy diễn để suy ra từ ý tưởng lý thuyết đó một loạt các hệ quả khác nhau dẫn đến đòi hỏi thực hiện các thực nghiệm và tiến hành các thực nghiệm; nếu các dự đoán ban đầu về lý thuyết được kiểm chứng, chúng ta chắc rằng lý thuyết đề ra ban đầu là đúng. Từ đó, ngoại suy (tạo nên các giả thuyết để giải thích cho vấn đề quan sát) được hiểu là suy diễn (SL logic để tạo ra một dãy các giả thuyết) và quy nạp (kiểm tra tính đúng đắn của các giả thuyết) [14, tr.52].

Từ mô hình do Pierce đề xuất, chúng ta có thể hiểu ngoại suy là một quá trình xây dựng giả thuyết giải thích cho một kết quả quan sát được nào đó. Tuy vậy,

những nhà nghiên cứu như J. Josephon và S. Josephon thì lại tổng kết một mô hình gồm bốn bước về ngoại suy theo nghĩa rộng hơn như sau [61, tr.99]:

D là một tập hợp các dữ liệu (các sự kiện, ...) (1)

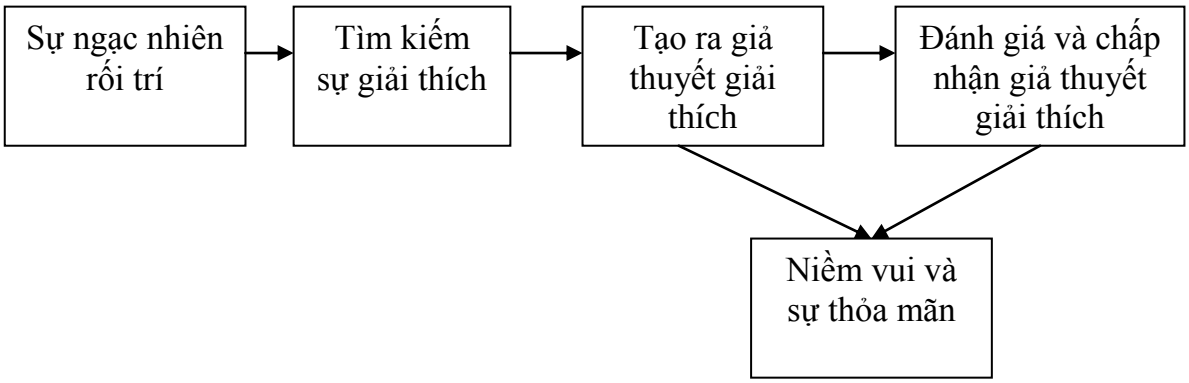
H giải thích D (nếu H đúng thì H sẽ giải thích cho D) (2)

Không có giả thuyết nào khác có thể giải thích D tốt hơn H. (3)

H có thể đúng. (4)

So sánh hai mô hình, ta thấy Pierce chỉ đề xuất ba bước (1), (2), (4) còn J. Josephon và S. Josephon thì cho rằng cần thiết phải có thêm bước (3). Tức là bên cạnh xây dựng giả thuyết còn có thêm việc đánh giá giả thuyết.

Nhiều học giả nghiên cứu về vấn đề này cũng đã bày tỏ các quan điểm khác nhau. Theo phân tích của Ferrando thì trong thực hành, quá trình xây dựng và lựa chọn giả thuyết thực ra là hòa quyện với nhau làm một [42]. Bởi vì trước một vấn đề, một sự kiện cần được giải thích có thể có vô số giả thuyết. Mặc khác chỉ có một giả thuyết đúng. Aliseda thì lại xem hai quá trình này như hai pha của SL ngoại suy với pha đầu tiên là xây dựng giả thuyết, pha thứ hai là lựa chon giả thuyết [35]. Ngoài ra, Thargard (2007) đề xuất quá trình SL ngoại suy gồm bốn bước được minh họa bằng sơ đồ cụ thể sau đây [63]:



Sơ đồ 1.2. Quá trình SL ngoại suy

Thargard cũng đồng ý với quan điểm của Pierce khi nhấn mạnh vai trò của tính gây ngạc nhiên như một yếu tố kích thích người ta SL. Sang bước ba và bước bốn, ông cho rằng có hai trường hợp xảy ra. Nếu SL "lười biếng" thì quá trình ngoại suy sẽ kết thúc với việc chỉ tạo một giả thuyết giải thích. Tuy nhiên, bản chất của ngoại suy là không chắc chắn cho nên người ta SL cẩn thận sẽ không hài lòng với việc chỉ tìm ra một giả thuyết trong khi chưa hề đánh giá các giả thuyết cạnh tranh

cũng như manh mối có thể có [41]. Quan điểm của chúng tôi là đồng ý với cách chia ngoại suy thành hai pha của Aliseda và phân tích về mặt tâm lý của Thargard. Bởi lẽ, chúng tôi cho rằng việc đưa ra giả thuyết tốt nhất để giải thích cho kết quả quan sát được chính là cái đích cuối cùng mà người SL nên cố gắng hướng đến.

1.3.7. Năng lực sử dụng biểu diễn Toán học để tìm tòi quy luật hay tính chất Toán học

Một PĐ có thể được lập thành từ ý tưởng tri giác của vấn đề hoặc từ chuyển đổi nhận thức của ý tưởng. Cơ sở của loại PĐ này chính là sự biểu diễn nội dung của vấn đề một cách cụ thể hoặc bằng tư duy trực quan. Không phải chú ý ngay lập tức sự tồn tại mối quan hệ giữa các yếu tố của vấn đề mà thay vào đó là chúng ta tập trung vào sáng tạo sự biểu diễn mới của bài toán. Một khi sự biểu diễn này tồn tại thì nó đủ mạnh để tái hiện chính xác mối quan hệ mối quan hệ của các yếu tố Toán học của bài toán, từ đó hỗ trợ cho cả PĐ và CM.

*** Các hình thức của biểu diễn Toán học**

Biểu diễn Toán học là sự mô tả về các mối quan hệ giữa các đối tượng và ký hiệu, là cầu nối để giao tiếp một cách dễ dàng với người khác, có thể là những dấu hiệu trên giấy, các hình vẽ, sơ đồ, biểu đồ, đồ thị, các phác thảo HH và các phương trình.

Theo Tadao (2007), các biểu diễn trong giáo dục toán có thể được tổ chức thành năm dạng sau [62]:

Dạng 1: Biểu diễn thực: Các biểu diễn dựa trên trạng thái thực của đối tượng. Loại biểu diễn này có thể tác động trực tiếp, hết sức cụ thể và tự nhiên.

Dạng 2: Biểu diễn bằng vật liệu thao tác được: Chúng như là công cụ hỗ trợ DH. Đó là sự thay thế các mô hình giả về đối tượng mà HS có thể tác động trực tiếp. Loại biểu diễn này có thể tác động, có phần cụ thể và giả tạo.

Dạng 3: Biểu diễn bằng hình ảnh: Các biểu diễn sử dụng tranh minh họa, sơ đồ, đồ thị, biểu đồ. Đây là loại biểu diễn giàu tính trực quan và sinh động.

Dạng 4: Biểu diễn bằng ngôn ngữ: Là loại biểu diễn sử dụng ngôn ngữ hằng ngày để diễn đạt (nói hoặc viết). Loại biểu diễn này bị chi phối bởi các quy ước, nhưng thiếu tính ngắn gọn, súc tích. Mặt khác, biểu diễn có tính mô tả và có thể tạo nên cảm giác quen thuộc.

Dạng 5: Biểu diễn bằng ký hiêu: Là biểu diễn sử dụng ký hiệu Toán học như số, ký tự, biểu tượng.

1.4. Các biểu hiện cơ bản của lập luận có căn cứ

Việc HS nắm vững các tiên đề HH và các kiến thức logic ở dạng ẩn tàng là việc chuẩn bị điều kiện cho sự hình thành kỹ năng LLCCC.

Các biểu hiện của LLCCC của HS được thể hiện ở các khả năng sau đây:

1.4.1. Năng lực phân tích cấu trúc logic của bài toán. Từ đó người học nhìn giả thiết và kết luận của bài toán theo khía cạnh khác

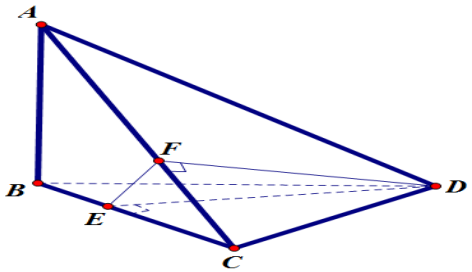
Việc phân tích các tiền đề và kết luận của bài toán nhằm bộc lộ dấu hiệu bản chất, các mối liên hệ giữa các dấu hiệu được xem xét, các hình ảnh tương phản của các dấu hiệu đó, tìm ra cách diễn đạt khác nhau của các khái niệm được nghiên cứu.

Từ việc phân tích các tiền đề (mệnh đề đúng) và kết luận của bài toán giúp HS rèn luyện nhìn các tiền đề và kết luận theo cách nhìn khác nhau dựa vào định lý, tiên đề hoặc khái niệm mà các em đã được học. Từ đó các em xây dựng nhiều giả thuyết khác nhau từ một bài toán gốc.

Ví dụ 1.10.

Bài toán: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Trong tam giác BCD vẽ đường cao DE, trong tam giác ACD vẽ đường cao DF.

CM: $(DFE) \perp (ACD)$



Hình 1.12

Các tiền đề đúng:

A_1: "Tứ diện có $AB \perp (BCD)$"; A_2: "Trong tam giác BDC có $DE \perp BC$ tại E"

A_3: "Trong tam giác ACD có $DF \perp AC$ tại F"

Kết luận: B: "$(DFE) \perp (ACD)$"

Tiền đề A_1, A_2 và kết luận B của bài toán được nhìn theo các khía cạnh khác như sau:

- Tiền đề A_1: "Tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$" được nhìn theo một trong các khía cạnh sau đây:

  + $(ABC) \perp (BCD)$ (vì $AB \subset (ABC)$)

  + Hoặc $(ABD) \perp (BCD)$ (vì $AB \subset (ABD)$)

  + Hoặc $\begin{cases} (ABC) \perp (BCD) \\ (ABD) \perp (BCD) \\ (ABC) \cap (ABD) = AB \end{cases}$.

- Tiền đề A_2: "Trong tam giác BDC có $DE \perp BC$ tại E" được nhìn theo khía cạnh $DE \perp AC$ vì $\begin{cases} DE \perp BC \subset (ABC) \\ DE \perp AB \subset (ABC) \end{cases}$
- **Kết luận**: B: "$(DFE) \perp (ACD)$" được nhìn theo khía cạnh $AC \perp (DFE)$ vì $\begin{cases} AC \perp DF \subset (DFE) \\ AC \perp DE \subset (DFE) \\ DE \cap DF = \{D\} \end{cases}$ và $AC \subset (ACD)$.

1.4.2. Năng lực thấy được đường lối giải, tìm được lời giải nhờ sơ đồ "phân tích đi xuống"

Để tìm được đường lối giải HS có thể phân tích theo sơ đồ như sau:

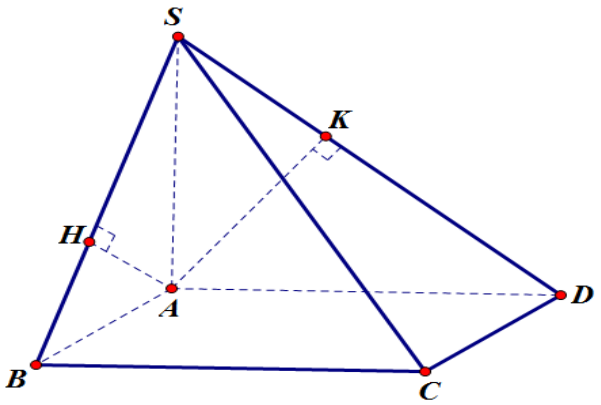
$$B \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n$$

Sơ đồ 1.3. Sơ đồ "phân tích đi xuống"

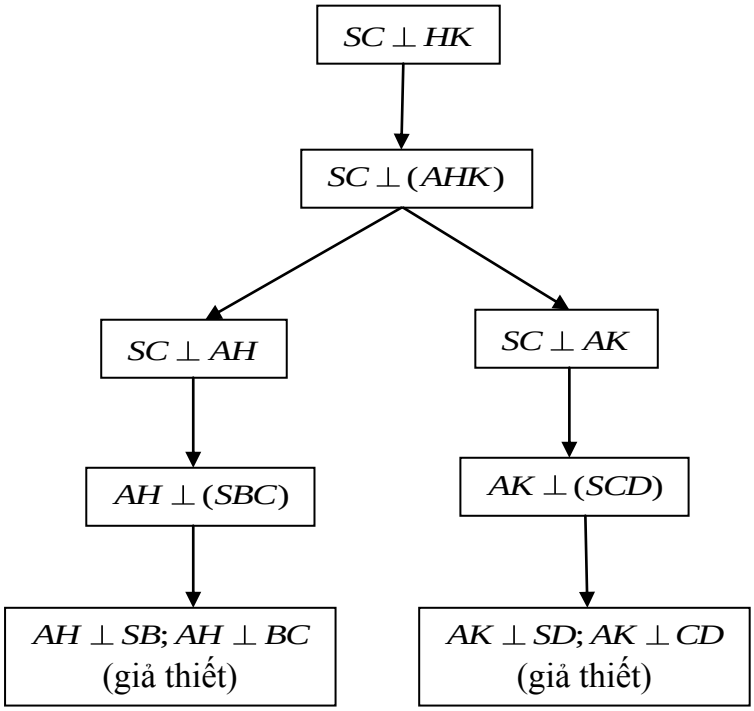
Sơ đồ 1.3 không phải là CM mà nó giúp HS tìm được đường lối giải toán. Theo sơ đồ 1.3, nếu A_n là mệnh đề đúng thì chưa thể kết luận B được: nó có thể đúng, có thể sai. Tuy nhiên sơ đồ 1.3 cho ta một dự đoán, chúng ta có thể CM được theo sơ đồ: $A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \ldots \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow B$. Khi đó, nếu mệnh đề A_n đúng thì mệnh đề B được CM [2,tr.167]. Trong đó A_i (i=1,2,..,n) hoặc là tiên đề, giả thiết, định nghĩa, định lý,...hoặc là kết luận logic của một số mệnh đề trong dãy đứng trước nó, B đứng cuối dãy và là kết luận logic của một số mệnh đề trong dãy đứng trước nó.

Trong sơ đồ 1.3, nếu "A_n là mệnh đề sai" thì ta kết luận "B là mệnh đề sai".

Ví dụ 1.11. Phân tích theo lược đồ đi xuống để tìm đường lối CM của bài toán: "Cho tứ diện $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB và SD. CM rằng $SC \perp HK$". Từ đó trình bày lời giải của bài toán.



Hình 1.13



Sơ đồ 1.4. Mô tả việc tìm tòi lời giải của bài toán theo "phân tích đi xuống"

Từ sơ đồ 1.4, HS trình bày lời giải của bài giải như sau:

Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp BC \subset (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow SC \perp AH \quad (1) \\ SB \cap BC = \{B\} \end{cases}$

và $\begin{cases} AK \perp SD \subset (SCD) \\ AK \perp CD \subset (SCD) \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow SC \perp AK \quad (2) \\ SD \cap CD = \{D\} \end{cases}$

Vậy, từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} SC \perp AH \subset (AHK) \\ SC \perp AK \subset (AHK) \Rightarrow SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp HK. \\ AH \cap AK = \{A\} \end{cases}$

1.4.3. Năng lực xác định được căn cứ ở mỗi bước lập luận trong lời giải bài toán của học sinh

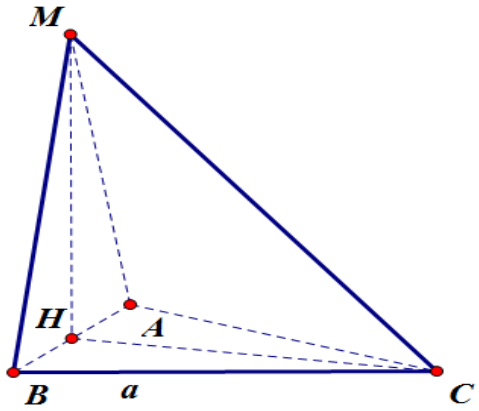
Đây là khả năng mà HS sử dụng căn cứ của mỗi bước lập luận trong trình bày lời giải bài toán của mình để khẳng định tính đúng đắn của bài toán. Các căn cứ chính là các định nghĩa, định lý hay tiên đề được thừa nhận được đưa vào trong mỗi bước lập luận CM của các em.

Ví dụ 1.12. Ví dụ sau đây mô tả việc tìm các căn cứ của mỗi bước lập luận trong trình bày lời giải bài toán của HS.

Bài toán:

Cho hình chóp *M.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh a, (*MAB*) cân tại M và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC), góc hợp bởi cạnh *MC* và (*ABC*) là 30^0.

Xác định khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng (*MAC*).



Hình 1.14

Sau đây là căn cứ của mỗi bước lập luận của HS trong quá trình GQVĐ:

+ Gọi *H* là trung điểm của *AB*. Vì $\begin{cases}(MAB)\perp(ABC)\\(MAB)\cap(ABC)=AB\\MH\perp AB\ (do\ SA=SB)\end{cases}$ nên $MH\perp(ABC)$

Căn cứ của lập luận là định lý: "Hai mặt phẳng (*P*), (*Q*) vuông góc với nhau, một đường thẳng bất kỳ nằm trong mặt phẳng này vuông góc giao tuyến của (*P*) và (*Q*) thì vuông góc với mặt phẳng kia".

+ Do *HC* là hình chiếu vuông góc của *MC* lên (ABC) nên góc hợp bởi *MH* và (*ABC*) chính là góc hợp bởi *MC* và *HC*. Do đó $MCH=30^0$.

Căn cứ của lập luận là định nghĩa: "Nếu đường thẳng *a* không vuông góc với mặt phẳng (*P*) thì góc giữa *a* và hình chiếu *a*'của nó trên (*P*) gọi là góc giữa đường thẳng *a* và mặt phẳng (*P*)".

+ Xác định khoảng cách từ điểm *B* đến (*MAC*).

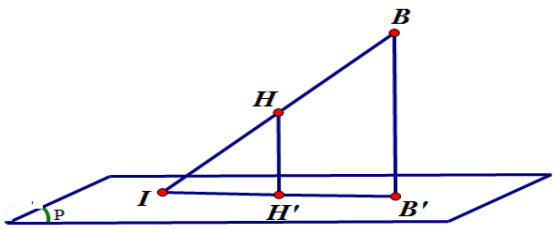
Do $d(B,(MAC)=2d(H,(MAC))$ nên HS chuyển về việc xác định khoảng cách từ *H* đến (*MAC*).

Căn cứ của lập luận là vận dụng định lý Talet:

Vì HH'//BB' nên theo định lý Talet ta có

$\frac{HH'}{BB'}=\frac{IH}{IB}=\frac{1}{2}$.

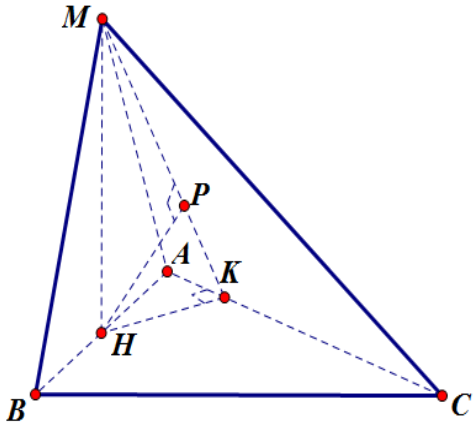
Từ đó ta có $BB'=2.HH'$ tức là $d(B,(P))=2.d(H,(P))$



Hình 1.15

Xác định $d(H,(MAC))$:

Trong (ABC) kẻ $HK \perp AC$. Do $\begin{cases}(MHK)\perp(MAC)\\(MHK)\cap(MAC)=MK\end{cases}$ nên trong (MHK) ta dựng $HP \perp MK$ thì $HP \perp (MAC)$ vì thế HP chính là khoảng cách từ H đến (MAC). Từ đó suy ra khoảng cách từ B đến (MAC).



Hình 1.16

Căn cứ của bước lập luận này chính là định lý:

"Hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau, một đường thẳng bất kỳ nằm trong mặt phẳng này vuông góc giao tuyến của (P) và (Q) thì vuông góc với mặt phẳng kia".

1.4.4. Năng lực kiểm tra, đánh giá lời giải các bài toán dựa vào các quy tắc suy luận

Đó là khả năng HS hiểu và áp dụng các quy tắc SL vào việc giải các bài toán, các quy tắc SL sau đây:

Các loại tam đoạn luận phổ biến (khẳng định, phủ định, lựa chọn, bắc cầu); Quy tắc kết luận từ mệnh đề phổ biến; Quy tắc SL quy nạp (Quy nạp Toán học).

Ví dụ 1.13. CM rằng đối với tứ giác ABCD bất kỳ ta luôn có [9]:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$$

CM: Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\ +\ \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\ =\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Trong phép CM nói trên HS đã trải qua các bước SL hợp logic để lần lượt chỉ ra các mệnh đề sau đều đúng:

A_1:"$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\ +\ \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ ": Mệnh đề đúng, sử dụng tính chất kết hợp của phép cộng các vec tơ.

A_2:" $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\ +\ \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\ =\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$": Mệnh đề đúng, sử dụng quy tắc ba điểm đối với phép cộng: "Với ba điểm A, B, C bất kỳ thì ta luôn có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$"

A_3:"$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}$": Mệnh đề đúng, sử dụng quy tắc ba điểm đối với phép cộng.

A_4:"$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$": Mệnh đề đúng, theo định nghĩa vec tơ –không.

B: "$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$"

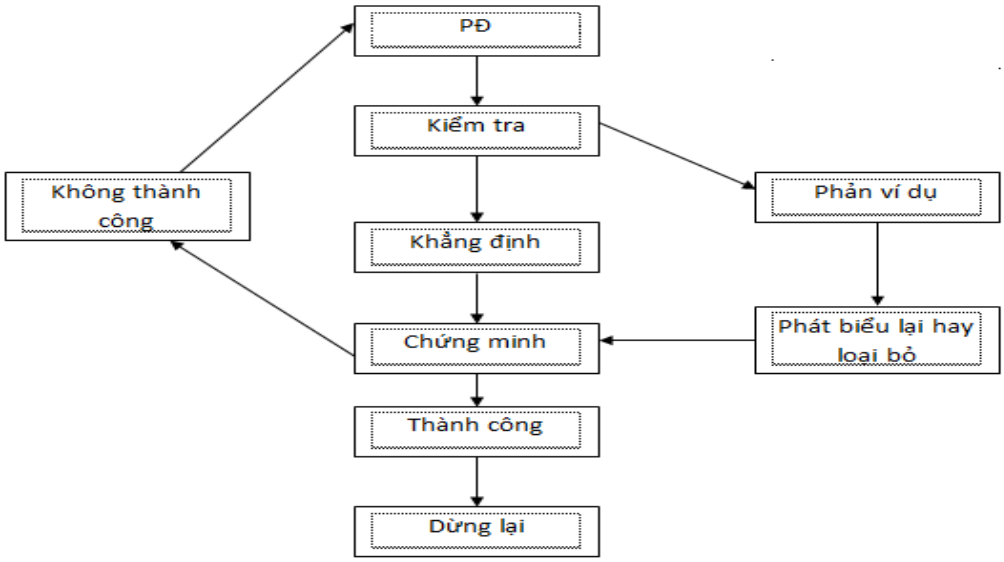
Sử dụng quy tắc SL kết luận: $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \Rightarrow B$

Vì các tiền đề A_1, A_2, A_3, A_4 là đúng nên kết luận *B* đúng.

1.4.5. Năng lực tìm các phản ví dụ để bác bỏ mệnh đề

Một mệnh đề được phát biểu mà chưa biết tính đúng/ sai của nó. Muốn bác bỏ mệnh đề đó ta chỉ việc tìm một phản ví dụ để chứng tỏ mệnh đề đó sai.

Dưới đây là sơ đồ của De Villier minh họa mối quan hệ giữa PĐ và phản ví dụ trong quá trình CM:



Sơ đồ 1.5. Sơ đồ minh họa mối quan hệ giữa PĐ và phản ví dụ [48, tr. 23]

Bắt đầu từ PĐ của người học (PĐ có thể đúng hoặc sai), HS kiểm tra PĐ đó để xem xét tính đúng/sai của PĐ bằng ví dụ hỗ trợ hoặc phản ví dụ. Nếu tìm được phản ví dụ thì loại bỏ PĐ đó hoặc thay thế bằng PĐ khác. Nếu tìm được các ví dụ hỗ trợ thì củng cố niềm tin PĐ của mình là đúng. Để khẳng định PĐ đó đúng thì HS CM mệnh đề PĐ bằng SL Toán học. Nếu CM thành công thì dừng lại. Nếu trong quá trình CM mà HS tìm thấy sự mâu thuẫn thì bác bỏ PĐ và tìm PĐ khác.

Ví dụ 1.14. "Trong không gian, nếu hai đường thẳng phân biệt *a, b* không có điểm chung thì hai đường thẳng *a, b* song song với nhau" là PĐ sai. Phản ví dụ để bác bỏ mệnh đề này là: "Tồn tại hai đường thẳng phân biệt *a, b* chéo nhau, không có điểm chung và không song song với nhau".

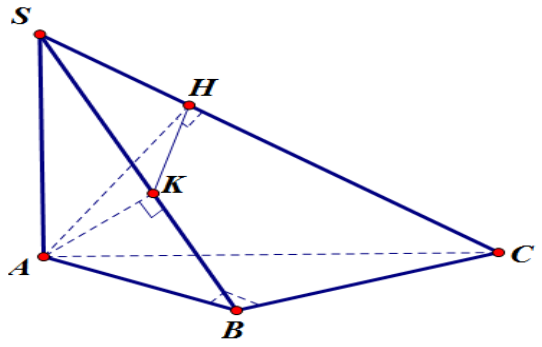
Ví dụ 1.15. Cho hình chóp tam giác *S.ABC*. Nếu *ABC* là tam giác vuông tại *B*. Cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Từ A kẻ $AK \perp SB$ và $AH \perp SC$. Em hãy dự đoán đường

thẳng và mặt phẳng nào vuông góc với nhau. Sử dụng SL Toán học để khẳng định PĐ của mình là đúng.

HS lập luận như sau:

Vì $AH \perp SC$ mà $SC \subset (SBC)$ nên $AH \perp (SBC)$. Và HS trả lời rằng $AH \perp (SBC)$. Rõ ràng đây là PĐ sai.

Các em khác đã đưa ra phản ví dụ để bác bỏ PĐ này.



Hình 1.17

Phản ví dụ: $\begin{cases} AK \perp SB \text{ (gt)} \\ AK \perp BC \ (BC \perp (SAB) \Rightarrow AK \perp (SBC) \\ SB \cap BC = \{B\} \end{cases}$ chứng tỏ PĐ $AH \perp (SBC)$ là sai

vì $\begin{cases} AH \perp (SBC) \\ AK \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH // AK$: Vô lý, rõ ràng chúng cắt nhau tại A.

Sai lầm của PĐ trên là các em đã PĐ không có căn cứ. Căn cứ của PĐ là định lý: "Nếu đường thẳng *d* vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau *a*, *b* nằm trong mặt phẳng (*P*) thì đường thẳng *d* vuông góc với mặt phẳng (*P*))".

Vì các em chỉ dựa vào một đường thẳng *a* vuông góc với một đường thẳng *b* nằm trong mặt phẳng mà đưa ra kết luận đường thẳng *a* vuông góc với mặt phẳng (*P*) chứa đường thẳng *b* nên dẫn đến PĐ sai lầm.

Ví dụ 1.16. Dự đoán: "Đường cao của tứ diện thì đồng quy tại một điểm (Đường cao của tứ diện là đường thẳng đi qua một đỉnh và vuông góc với mặt đối diện)". Đây là dự đoán sai vì chỉ cần đưa ra phản ví dụ: "Tứ diện *ABCD* có $AB \perp (BCD)$ và tam giác *BCD* có góc B không vuông".

1.5. Phạm vi sử dụng phán đoán và lập luận có căn cứ trong dạy học hình học ở trường trung học phổ thông

Mặc dù tốn nhiều thời gian nhưng con đường DH có khâu PĐ có ưu điểm sau đây:

Khuyến khích người học tìm tòi, dự đoán, phát hiện vấn đề trước khi GQVĐ, khuyến khích học tập tri thức Toán học trong quá trình nó đang nảy sinh chứ không hạn chế ở việc trình bày lại tri thức Toán học có sẵn.

HS có ý thức rõ ràng về sự phân biệt và mối liên hệ giữa PĐ và CM.

Khuyến khích phát triển NL trí tuệ chung cho HS như phân tích, tổng hợp, trừu tượng hóa, khái quát hóa, so sánh, tương tự ...

Con đường này thường sử dụng khi tồn tại một cách tìm tòi, phát hiện định lý, phát hiện GQVĐ của một bài toán và HS có thể hiểu được và có thể tự mình thực hiện được tới mức độ nhất định. Tuy nhiên, điều kiện đó không phải bao giờ cũng được thỏa mãn. Vì vậy, còn phải sử dụng cả con đường suy diễn khi cần thiết [17, tr. 285].

Nhu cầu của việc luyện tập PĐ và LLCCC cho HS trong DH HH ở trường THPT là do:

+ Đòi hỏi tiếp cận phát hiện trong DH HH

Để người học phát hiện vấn đề trước khi GQVĐ thì người thầy cần thiết kế các tình huống, các trường hợp riêng để HS tìm tòi, dự đoán vấn đề khái quát. Trong hoạt động phát hiện một khái niệm, một định lý, một mệnh đề nào đó cần sử dụng phương thức PĐ. Việc dự đoán có lúc thành công, có khi thất bại, vì vậy HS phải biết điều chỉnh phương hướng mới đi đến kết quả. Sau khi khám phá mệnh đề mới, người học phải sử dụng LLCCC để CM mệnh đề đó là định lý [17].

+ Đòi hỏi tiếp cận kiến tạo kiến thức mới

Theo quan điểm kiến tạo thì kiến thức và kinh nghiệm đã có là nền tảng nảy sinh kiến thức mới. Trên cơ sở kiến thức kinh nghiệm đã có, HS thực hiện các PĐ, nêu các giả thuyết và tiến hành hoạt động kiểm nghiệm kết quả bằng con đường suy diễn logic. Nếu PĐ không đúng thì phải tiến hành điều chỉnh lại PĐ, sau đó kiểm nghiệm lại để đi đến kết quả mong muốn [25].

+ Đòi hỏi tiếp cận PPDH tích cực

Điểm nổi bật của các PPDH tích cực (chẳng hạn như: PPDH kiến tạo, DH phát hiện và GQVĐ; PPDH khám phá,...) là DH cách phát hiện vấn đề và DH cách GQVĐ. Việc đưa hoạt động PĐ và LLCCC vào các hoạt động DH HH cho HS là phù hợp với việc tiếp cận PPDH tích cực kể trên.

Từ phân tích trên chúng tôi xây dựng các tình huống trong DH HH theo hướng bồi dưỡng hoạt động PĐ và LLCCC cho HS ở trường THPT sau đây:

1.5.1. Dạy học khái niệm

Để HS có thể tự mình phát biểu khái niệm thì người học cần khảo sát các trường hợp riêng, thông qua các hoạt động trí tuệ như: Phân tích - tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, đặc biệt hóa, trừu tượng hóa,.. để rút ra được những dấu hiệu bản chất của khái niệm và từ đó phát biểu khái niệm. Chúng tôi đưa ra các bước để mô tả cụ thể như sau:

Bước 1: Khảo sát các trường hợp riêng.

Bước 2: Sử dụng các hoạt động trí tuệ để tìm được đặc điểm chung của các trường hợp riêng được khảo sát. Qua đó, HS có thể tìm được các dấu hiệu bản chất được chứa đựng trong khái niệm.

Bước 3: Người học tự mình PĐ và phát biểu khái niệm.

Bước 4: Củng cố khái niệm.

Ví dụ 1.17. Ví dụ này mô tả DH định nghĩa về đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau bằng con đường có khâu PĐ [9, tr.117]:

Bước 1: *Khảo sát các trường hợp riêng*

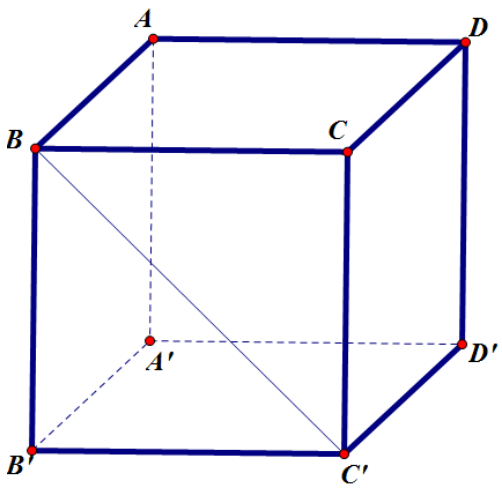
Trên hình hộp chữ nhật *ABCDA'B'C'D'*, cho các cặp đường thẳng:

+) *AD* và *BB'*

+) *AD* và *BC'*

1. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng *AD* và *BB'* và vị trí tương đối giữa hai đường thẳng *AD* và *BC'*?

2. Quan hệ giữa đường thẳng *AB* với các đường thẳng *AD* và *BB'*? Giữa đường thẳng *AB* với cặp đường thẳng *AD* và *BC'*?



Hình 1.18

1. AD và BB' chéo nhau và vuông góc với nhau, AD và BC' chéo nhau, không vuông góc với nhau

2. Ta có: $AB \perp AD$ tại A và $AB \perp BB'$ tại B, $AB \perp AD$ tại A và $AB \perp BC'$ tại B.

Bước 2: *Sử dụng các hoạt động trí tuệ như phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa,... để tìm được đặc điểm chung của các trường hợp riêng được khảo sát. Từ đó, HS có thể tìm được các dấu hiệu bản chất được chứa đựng trong khái niệm và hiểu sâu khái niệm.*

- GV đặt câu hỏi: Hai cặp đường thẳng chéo nhau AD, BB' và AD và BC' có đặc điểm gì giống nhau? Điểm khác nhau cơ bản là gì?

+ *Điểm giống nhau*: Đường thẳng *AB* vuông góc và cắt hai đường thẳng AD, BB' và *AB* cũng vuông góc và cắt với hai đường thẳng AD và BC'.

+ *Điểm khác nhau*: AD, BB' vuông góc với nhau, AD và BC' không vuông góc với nhau.

- *GV khái quát hóa*: Đường thẳng nào vuông góc và cắt với hai đường thẳng chéo nhau *a, b* thì đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung. *AB* xác định như trên được gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BB' và AB cũng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC'

Bước 3: Người học tự mình PĐ và phát biểu định nghĩa, GV khắc sâu bản chất của khái niệm

GV đưa ra câu hỏi: Từ việc khảo sát các trường hợp riêng ở trên, em hãy PĐ và phát biểu định nghĩa về đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau *a,b*?

HS dự đoán phát biểu định nghĩa:

Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau *a, b* và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của *a* và *b* (*a, b* vuông góc hoặc không vuông góc với nhau).

GV khắc sâu bản chất của khái niệm bằng các câu hỏi: "Nếu đường thẳng vuông góc hoặc cắt hai đường thẳng chéo nhau thì liệu nó có được gọi là đường vuông góc chung không?". Cụ thể như sau:

- *GV đặt câu hỏi: CD* trên hình 1.18 có phải là đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng AD, BB' và AD, BC' không? Vì sao?

CD vuông góc với các đường thẳng *AD, BB*', *BC*' và *CD* cắt *AD* tại *D* nhưng *CD* không cắt *BB*', *BC'*. Do vậy, *CD* không phải là đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng chéo nhau AD, BB' và AD và BC'.

- *GV đặt câu hỏi: BD* trên hình 1.18 có phải là đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng AD, BB' và AD, BC' không? Vì sao?

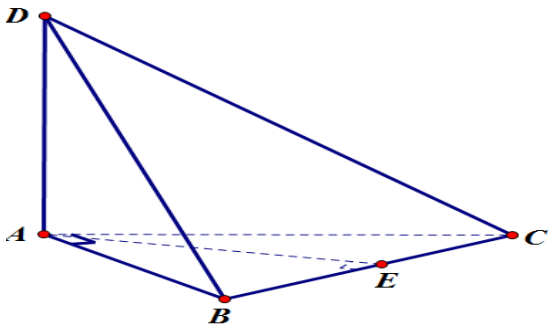
BD cắt *AD* tại *D*, cắt *BB*' tại *B*, cắt *BC*' tại *B* nhưng *BD* không vuông góc với các đường thẳng đó. Vì thế, *BD* không phải là đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng AD, BB' và AD, BC'.

Bước 4: Củng cố định nghĩa

GV sử dụng bài tập về xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau (chúng vuông góc hoặc không vuông góc với nhau) để củng cố khái niệm. Từ đó, HS được khắc sâu những dấu hiệu bản chất của khái niệm. Chẳng hạn, chúng tôi sử dụng bài tập sau đây để củng cố khái niệm về đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

Cho tứ diện *ABCD* trong đó *AB*, *AC* và *AD* vuông góc với nhau từng đôi một. Tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

a. *AD* và *BC*;
b. *AB* và *CD;*
c. *BD* và *AC.*



Hình 1.19

1.5.2. Dạy học định lý

Trong DH định lý Toán học, người ta thường sử dụng hai con đường trong đó có con đường có khâu PĐ.

Con đường DH định lý có khâu PĐ được thể hiện ở các bước sau đây [17, tr. 284]:

Bước 1: Gợi động cơ học tập định lý: Xuất phát từ một nhu cầu nảy sinh trong thực tiễn hoặc nội bộ Toán học.

Bước 2: Dự đoán và phát biểu định lý: Dựa vào phương pháp luận nhận thức mang tính suy đoán: Quy nạp không hoàn toàn, lật ngược vấn đề, tương tự hóa, khái quát hóa một định lý đã biết, nghiên cứu trường hợp suy biến, xét mối quan hệ và phụ thuộc,...

Bước 3: CM định lý: CM định lý trong đó chú ý việc gợi động cơ CM và gợi động cơ cho HS thực hiện những hoạt động ăn khớp với những phương pháp SL, CM thông dụng và những quy tắc kết luận logic thường dùng.

Cần tập luyện cho HS những quy tắc kết luận logic thường dùng. Những quy tắc này không được trình bày tường minh trong nội dung môn Toán ở trường phổ thông, HS lĩnh hội chúng một cách ẩn tàng qua những trường hợp cụ thể. Thường dùng nhiều nhất là quy tắc có sơ đồ: $\dfrac{A \to B, A}{B}$

Bước 4: Vận dụng định lý: Vận dụng định lý vừa tìm được để giải quyết, khép kín vấn đề đặt ra khi gợi động cơ.

Bước 5: Củng cố định lý: Được thực hiện bằng các hoạt động sau:

- *Nhận diện và thể hiện định lý*

Nhận diện và thể hiện định lý là hai hoạt động theo chiều hướng trái ngược nhau, có tác dụng củng cố định lý, tạo tiền đề cho việc vận dụng định lý.

- *Hoạt động ngôn ngữ*

+ Phát biểu lại định lý bằng lời của mình và biết cách thay đổi cách phát biểu, diễn đạt định lý dưới những ngôn ngữ khác nhau;

+ Phân tích, nêu bật những ý quan trọng chứ đựng trong định lý một cách tường minh hay ẩn tàng.

- *Khái quát hóa, đặc biệt hóa và hệ thống hóa định lý*

Mối liên hệ giữa những định lý có thể là mối quan hệ tổng quát hay đặc biệt: Một định lý có thể là một sự mở rộng hay một trường hợp đặc biệt của một định lý khác.

Ví dụ 1.18. Đây là ví dụ mô tả dạy định lý 2 [9, tr.109] bằng con đường có khâu PĐ như sau:

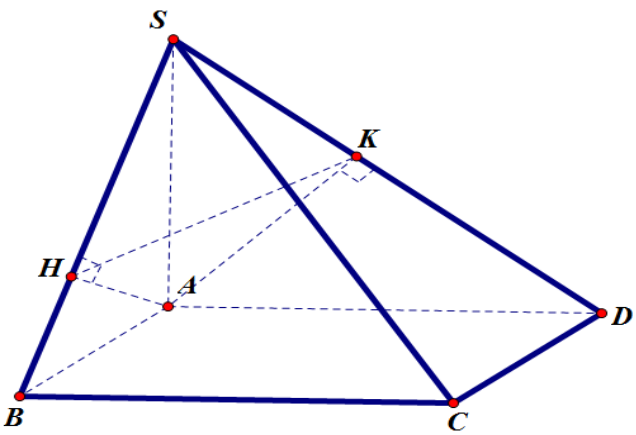
Bước 1: Gợi động cơ học tập định lý:

+ Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $(ABCD)$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB, SD.

a. Em hãy tìm mối quan hệ giữa các cặp mặt phẳng sau:

+ (AHK) và (SBC);

+ (AHK) và (SCD).



Hình 1.20

b. Em hãy tìm mối quan hệ giữa SC với (AHK)?

a. Ta có: $AH \perp (SBC)$ mà $AH \subset (AHK)$ nên $(AHK) \perp (SBC)$ và $AK \perp (SCD)$ mà $AK \subset (AHK)$ nên $(AHK) \perp (SCD)$

b. $\begin{cases} SC \perp AH \subset (AHK) \\ SC \perp AK \subset (AHK) \Rightarrow SC \perp (AHK) \\ AH \cap AK = \{A\} \end{cases}$

+ *GV cho HS nêu lại các kết quả vừa CM*:

Câu a: $(AHK) \perp (SBC)$ và $(AHK) \perp (SCD)$ (mệnh đề đúng)

Câu b: $SC \perp (AHK)$ (mệnh đề đúng)

+ *GV đặt ra vấn đề*: Vậy, chúng ta có mối liên hệ gì giữa mệnh đề a và mệnh đề b không?

Dự kiến câu trả lời: Chúng có mối liên hệ nhân quả với nhau, HS thấy rằng do $SC = (SBC) \cap (SCD)$ nên người học dự đoán mệnh đề a suy ra mệnh đề b.

Bước 2: Dự đoán và phát biểu định lý:

+ GV hỏi: "Từ kết quả dự đoán ở trên, $(SBC) \perp (AHK)$ và $(SCD) \perp (AHK)$ thì $SC \perp (AHK)$ với $SC = (SBC) \cap (SCD)$, em hãy dự đoán trường hợp khái quát và phát biểu dự đoán của mình?"

+ HS trả lời: Nếu mặt phẳng $(P) \perp (R)$ và $(Q) \perp (R)$ thì $a \perp (R)$ với $a = (P) \cap (Q)$

+ HS phát biểu định lý bằng lời: "Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó".

Bước 3: CM định lý:

+) GV hỏi: Em hãy nêu giả thiết và kết luận của định lý vừa phát biểu:

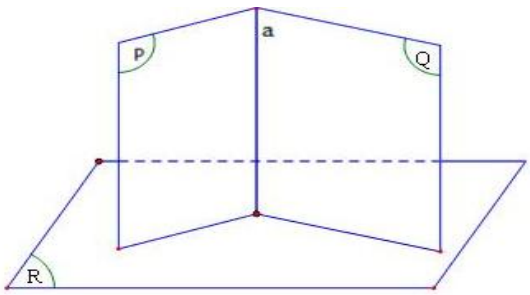
Giả thiết: Giả sử $(P) \perp (R)$, $(Q) \perp (R)$ và $(P) \cap (Q) = a$

Kết luận: $a \perp (R)$

+) Hướng dẫn HS CM định lý

i) *Áp dụng hệ quả 2* [9, tr. 109]:

Cho hai mặt phẳng (*P*) và (*Q*) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (*P*) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (*Q*) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (*P*).



Hình 1.21

Cụ thể:

$(P) \perp (R), (Q) \perp (R)$, lấy điểm $A \in a$ mà $a \subset (P)$ và $a \subset (Q)$ nên $A \in (P)$ và $A \in (Q)$.

Từ *A* dựng đường thẳng *a*' vuông góc với mặt phẳng (*R*) thì $a' \subset (P)$ và $a' \subset (Q)$.

ii) Vì $a' \subset (P)$ và $a' \subset (Q)$ nên *a'* là giao tuyến của (*P*) và (*Q*). Vậy *a'* trùng với *a*.

iii) Do *a'* vuông góc với (*R*) nên *a* vuông góc với (*R*).

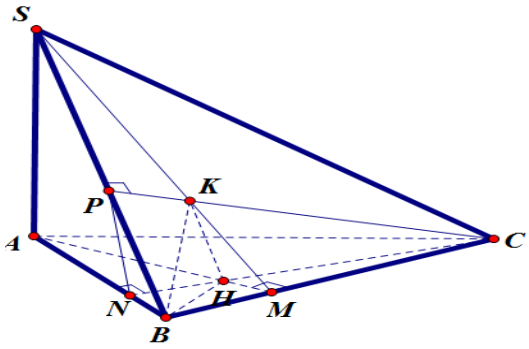
Bước 4: Vận dụng định lý:

Vận dụng định lý để khẳng định tính đúng đắn của vấn đề đặt ra khi gợi động cơ. Ta có mệnh đề đúng: "Nếu $(P) \perp (R)$, $(Q) \perp (R)$ và $(P) \cap (Q) = a$ thì $a \perp (R)$". Như thế: Mệnh đề a) suy ra mệnh đề b) và đây là mệnh đề kéo theo đúng.

Bước 5: Củng cố định lý

Chúng tôi lựa chọn nhận diện để củng cố định lý được thể hiện thông qua bài tập sau đây:

Cho tứ diện *SABC* có *SA* vuông góc với (*ABC*). Gọi *H* và *K* lần lượt là trực tâm của các tam giác *ABC* và *SBC*. Phải chăng *HK* vuông góc với (*SBC*)? Hãy giải thích ý kiến của mình?



Hình 1.22

Để kiểm tra *HK* có vuông góc với (*SBC*) hay không thì HS cần kiểm tra các yếu tố sau đây có thỏa mãn không?

+) *HK* là giao tuyến của hai mặt phẳng nào? $HK = (SAM) \cap (CPN)$

+) Kiểm tra (*SAM*) có vuông góc với (*SBC*) hay không? Do $BC \perp (SAM)$ nên $(SBC) \perp (SAM)$

+) Kiểm tra (*CPN*) có vuông góc với (*SBC*) hay không? Do $SB \perp (CPN)$ nên $(SBC) \perp (CPN)$

→ Các yếu tố trên thỏa mãn nên theo định lý ta có: $HK \perp (SBC)$

1.5.3. Dạy học giải bài tập

Chúng tôi đề xuất con đường để HS PĐ tìm lời giải cho một bài toán HH như sau:

Bước 1: Tìm hiểu nội dung bài toán:

- Nêu rõ giả thiết và kết luận của bài toán;
- Vẽ hình và dùng ký hiệu thích hợp;
- Hiểu rõ và diễn đạt các thuật ngữ và ký hiệu trong bài toán [17].

Bước 2: Dự đoán cách giải của bài toán:

+) Giải bài toán bằng con đường có khâu PĐ:

- *Đối với bài toán HH không gian có lời giải tương tự với bài toán HH phẳng*:
  - Dự đoán bài toán trong HH phẳng nhờ SL tương tự với bài toán HH không gian
  - Xây dựng các bước giải của bài toán trong HH phẳng
  - Xây dựng các bước giải của bài toán trong HH không gian nhờ tương tự với các bước CM của bài toán trong HH phẳng
- *Đối với bài toán HH không gian sử dụng kết quả của bài toán trong HH phẳng*
  - Nhớ lại bài toán trong HH phẳng có liên quan hoặc PĐ bài toán HH phẳng nhờ SL tương tự với bài toán trong HH không gian
  - Kiểm chứng tính đúng đắn của bài toán HH phẳng bằng SL CM
  - Thêm các yếu tố còn thiếu để vận dụng kết quả của bài toán HH phẳng cho bài toán HH không gian
  - Áp dụng kết quả của bài toán HH phẳng đối với các mặt phẳng của bài toán HH không gian
  - Kết nối các kết quả thu được (kết quả có được từ việc áp dụng bài toán HH phẳng) để có được điều cần CM hoặc điều cần giải quyết

+) Giải bài toán bằng con đường sử dụng LLCCC:

- Từ kết luận của bài toán phân tích ngược lên dần tới giả thiết của bài toán
- Thay thế giả thiết và kết luận bằng một điều khác tương đương. Từ việc thay thế đó có thể tìm được các ý CM cho bài toán.

Bước 3: Trình bày lời giải của bài toán

- Nhìn toàn bộ quá trình mò mẫm đi tìm lời giải để trình bày lời giải, xuất phát từ giả thiết để SL đến kết luận, bỏ những yếu tố PĐ.
- Nhìn lại lời giải để việc trình bày lập luận sáng sủa, rõ ràng, khi cần thiết phải điều chỉnh.
- Tìm căn cứ lập luận của mỗi các bước CM bài toán đó là các khái niệm, định lý, bài toán đã biết được vận dụng để giải toán.

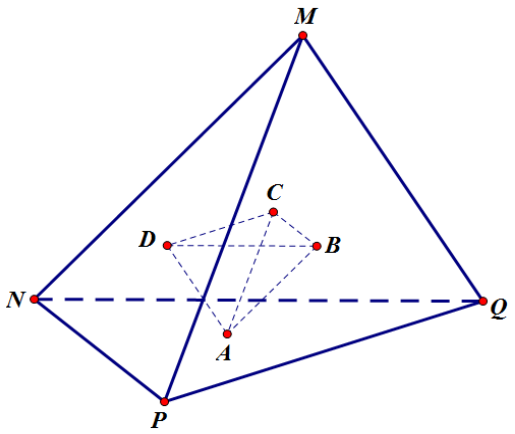
Bước 4: Nghiên cứu sâu lời giải

- Thay đổi cách nhìn bài toán để có một lời giải;
- Nghiên cứu bài toán tương tự;
- Nghiên cứu bài toán khái quát;
- Nghiên cứu vấn đề lật ngược của bài toán đã cho;
- Có thể sử dụng kết quả của bài toán này để giải một bài toán khác đã gặp.

Ví dụ 1.19.

Bước 1: Tìm hiểu nội dung bài toán

Cho tứ diện *ABCD*, qua *A* dựng mặt phẳng (α_A) song song với mặt phẳng (*BCD*), qua *B* dựng mặt phẳng (α_B) song song với mặt phẳng (*ACD*), qua *C* dựng mặt phẳng (α_C) song song với mặt phẳng (*ABD*), qua *D* dựng mặt phẳng (α_D) song song với mặt phẳng (*ABC*) tạo thành tứ diện *MNPQ*. CM rằng tứ diện *MNPQ* có các mặt nhận các đỉnh *A*, *B*, *C*, *D* làm trọng tâm.



Hình 1.23

Nêu rõ giả thiết và kết luận của bài toán:

Giả thiết:

+) Tứ diện *ABCD*, $(\alpha_A)//(BCD)$, $(\alpha_B)//(ACD)$, $(\alpha_C)//(ABD)$, $(\alpha_D)//(ABC)$

+) (α_A), (α_B), (α_C), (α_D) cắt nhau theo các giao tuyến tạo thành tứ diện *MNPQ*.

Kết luận:

(*NPQ*), (*MPQ*), (*MNQ*), (*MNP*) nhận các điểm *A*, *B*, *C*, *D* làm trọng tâm.

Bước 2: Dự đoán cách giải của bài toán HH không gian

- Liên hệ với bài toán quen thuộc trong HH phẳng nhờ tương tự

+ Dự đoán bài toán HH phẳng có liên quan nhờ sử dụng SL tương tự với bài toán HH không gian

Bài toán trong HH không gian	*Bài toán trong HH phẳng*
Tứ diện *ABCD*	Tam giác *ABC*
$(\alpha_A)//(BCD)$; $(\alpha_B)//(ACD)$; $(\alpha_C)//(ABD)$; $(\alpha_D)//(ABC)$ trong đó $(\alpha_A),(\alpha_B),(\alpha_C),(\alpha_D)$ là các mặt phẳng qua *A*, *B*, *C*, *D*	$d_A//BC$, $d_B//AC$, $d_C//AB$ trong đó d_A, d_B, d_C lần lượt là các đường thẳng qua *A*, *B*, *C*.
$(\alpha_A),(\alpha_B),(\alpha_C),(\alpha_D)$ cắt nhau theo các giao tuyến tạo thành tứ diện *MNPQ*	d_A, d_B, d_C cắt nhau tại các giao điểm tạo thành tam giác *MNP*
CM: Các mặt phẳng: (*NPQ*), (*MPQ*), (*MNQ*), (*MNP*) nhận các điểm *A*, *B*, *C*, *D* làm trọng tâm của các tam giác đó.	**CM**: *MP*, *MN*, *NP* nhận các điểm *A*, *B*, *C* làm trung điểm của các đoạn thẳng đó.

+ Bài toán liên hệ trong HH phẳng là:

Cho tam giác *ABC*, qua *A*, *B*, *C* kẻ các đường thẳng d_A, d_B, d_C song song với các cạnh *BC*, *AC*, *AB*. d_A, d_B, d_C cắt nhau tại các giao điểm tạo thành tam giác *MNP*. CM rằng *MP*, *MN*, *NP* nhận các điểm *A*, *B*, *C* làm trung điểm của các đoạn thẳng đó.

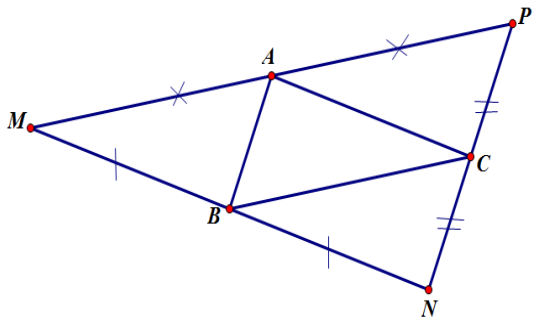
- *Giải bài toán HH phẳng vừa dự đoán để kiểm tra tính đúng đắn của nó*

Xét tứ giác *AMBC*, ta có: *MA*//*BC* và *MB* //*AC* nên *AMBC* là hình bình hành $\Rightarrow$ *MA* =*BC* (1)

Tương tự: Tứ giác *ABCP* là hình bình hành nên *AP* =*BC* (2)

Từ (1) và (2) ta có *MA* =*AP*. Vậy, *A* là trung điểm của *MP*.

CM tương tự ta có *B*, *C* lần lượt là trung điểm của *MN* và *NP*.



Hình 1.24

- *Vận dụng kết quả của bài toán trong HH phẳng để dự đoán cách giải của bài toán HH không gian*

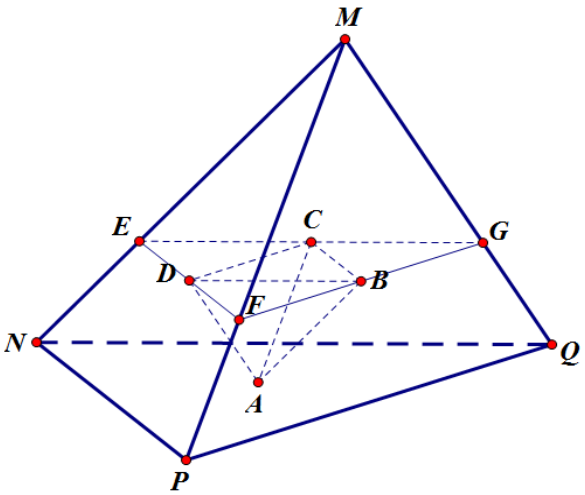
Sau đây là đàm thoại giữa GV và HS để giúp HS PĐ được cách giải đối với bài toán HH không gian:

+ GV: Mỗi mặt của tứ diện là những hình gì?

+ HS: là các tam giác

+ GV: Bài toán HH phẳng và bài toán HH không gian có liên quan với nhau như thế nào?

+ HS: Hai bài toán này tương tự nhau (đã kiểm chứng ở trên).



Hình 1.25

+ GV: Chúng ta dựa căn cứ nào để áp dụng kết quả của bài toán HH phẳng cho bài toán HH không gian?

+ HS: Trên mỗi mặt phẳng của bài toán HH không gian, kết quả đã biết trong HH phẳng đều đúng.

+ GV: Giả sử chúng ta chọn tam giác *BCD*. Để vận dụng kết quả của bài toán HH phẳng đã biết em cần bổ sung điều gì trên hình vẽ?

+ HS: Trong (*MNQ*), từ điểm *C* kẻ đường thẳng song song với *NQ*, cắt *MN* và *MQ* tại *E* và *G*.

Trong (*MPQ*), kéo dài *GB* cắt *MP* tại điểm *F*. Trong (*MNP*), *EF* đi qua *D* vì $E, F, D \in (MNP) \cap (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} (ABC)//(MNP) \ \text{(gt)} \\ (\text{EF}G) \cap (ABC) = BC \Rightarrow BC//EF \\ (\text{EF}G) \cap (MNP) = EF \end{cases}$

Vậy, *EF* đi qua *D* và song song với *BC*.

Tương tự, ta có *EG* qua *C* và song song với *BD*, *FG* qua *B* và song song với *CD*.

+ GV: Vậy, đến đây chúng ta áp dụng được kết quả của bài toán HH phẳng cho tam giác *BCD* được chưa? Nếu áp dụng được thì ta có được điều gì?

+ HS: Chúng ta áp dụng được kết quả của bài toán HH đối với tam giác *BCD*. Cụ thể là: *D* là trung điểm của *EF*, *C* là trung điểm của *EG*, *B* là trung điểm của *FG*. Vậy, *MD*, *MC*, *MB* là các đường trung tuyến của các tam giác *MNP*, *MNQ*, *MPQ (3)*.

+GV: Tương tự, áp dụng kết quả của bài toán HH phẳng đối với các tam giác: *ABC*, *ACD*, *ABD* thì ta thu được những điều gì? (nêu rõ các đường trung tuyến có được)

+ HS: Áp dụng đối với tam giác *ABC* ta có *QA*, *QB*, *QC* lần lượt là các đường trung tuyến của các tam giác *NPQ*, *MPQ*, *MNP* (4).

Áp dụng đối với tam giác *ACD* ta có *NA*, *NC*, *ND* lần lượt là các đường trung tuyến của các tam giác *NPQ*, *MNQ*, *MNP* (5).

Áp dụng đối với tam giác *ABD* ta có *PA*, *PB*, *PD* lần lượt là các đường trung tuyến của các tam giác *NPQ*, *MPQ*, *MNP* (6).

+ GV: Từ (3), (4), (5), (6) ta có được điều gì?

+ HS: *A*, *B*, *C*, *D* lần lượt là các trọng tâm của các tam giác *NPQ*, *MPQ*, *MNQ*, *MNP*

Bước 3: Trình bày lời giải của bài toán

- *Trình bày lời giải của bài toán HH không gian*:

  HS sắp xếp các ý của mỗi bước CM ở trên để được một lời giải hoàn chỉnh cho bài toán.

- *LLCCC trong lời giải của bài toán HH không gian*

  Lời giải của bài toán dựa vào các căn cứ sau đây:

  + Tính chất 6 [9, tr.48]: Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong HH phẳng đều đúng

+ Bài toán HH phẳng: "Cho tam giác *ABC*, qua *A*, *B*, *C* kẻ các đường thẳng d_A, d_B, d_C song song với các cạnh *BC*, *AC*, *AB*. d_A, d_B, d_C cắt nhau tại các giao điểm tạo thành tam giác *MNP*. CM rằng *MP*, *MN*, *NP* nhận các điểm *A*, *B*, *C* làm trung điểm của các đoạn thẳng đó".

+ Định lý 3 [9, tr. 67]: "Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và giao tuyến song song với nhau"

+ Định nghĩa về trọng tâm của tam giác: "Nếu *G* là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác *ABC* thì *G* là trọng tâm của tam giác đó"

Bước 4: Nghiên cứu sâu lời giải

+ Chúng tôi lựa chọn nghiên cứu vấn đề lật ngược của bài toán HH không gian đã cho được dùng để PĐ giả thuyết mới:

Nếu tứ diện *MNPQ* có *A*, *B*, *C*, *D* lần lượt là trọng tâm của các tam giác *NPQ*, *MPQ*, *MNQ*, *MNP* thì $(BCD)//(NPQ)$; $(ACD)//(MPQ)$; $(ABD)//(MNQ)$; $(ABC)//(MNP)$ không?

+ Để khẳng định được tính đúng đắn của giả thuyết thì người học sử dụng SL Toán học để kiểm chứng tính đúng/sai:

Gọi *I*, *J* là trung điểm của *PQ*, *NP*.

+ Xét tam giác *IMN* ta có:

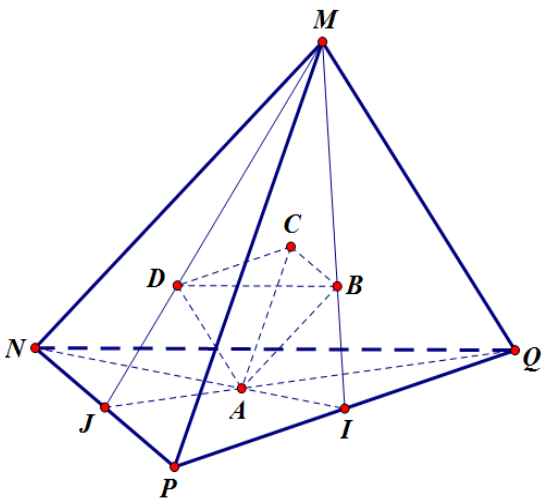
$\frac{IA}{IN} = \frac{IB}{IM} = \frac{1}{3}$ nên $AB//MN$

+ Xét tam giác *JMQ* ta có:

$\frac{JD}{JM} = \frac{JA}{JQ} = \frac{1}{3}$ nên $AD//MQ$.

Ta có:

$$\begin{cases} AB//MN \\ AD//MQ \\ AB \cap AD = \{A\} \\ MN \cap MQ = \{M\} \end{cases} \Rightarrow (ABD)//(MNQ)$$



Hình 1.26

+ CM tương tự cho các trường hợp còn lại.

Vậy, đây là giả thuyết đúng và chúng ta có bài toán mới như sau:

Cho tứ diện *MNPQ*. Gọi *A*, *B*, *C*, *D* lần lượt là trọng tâm của các tam giác *NPQ*, *MPQ*, *MNQ*, *MNP*. CM rằng:

$(BCD)//(NPQ)$; $(ACD)//(MPQ)$; $(ABD)//(MNQ)$; $(ABC)//(MNP)$

1.6. Thiết kế phán đoán

1.6.1. Các nguyên tắc của thiết kế phán đoán

GV thiết kế PĐ như thế nào? Nghiên cứu của Lin, Hsu và Yang (2011) cho thấy GV thường thiết kế dựa vào kinh nghiệm của bản thân là chủ yếu [51]. Những GV đó thường gặp phải nhiều hạn chế trong việc cải tiến chất lượng của nhiệm vụ và sự phát triển trong nghề nghiệp của họ. Vì thế, xây dựng các nguyên tắc để hướng dẫn GV thiết kế các PĐ là cần thiết. Theo mô tả của Reigeluth (1999) thì nguyên tắc nên được xây dựng dựa trên cơ sở lý thuyết và không cụ thể đến mức không thể khái quát hóa được [51]. Tuy nhiên, một nguyên tắc cũng không nên quá nặng nề về lý thuyết đến nỗi không áp dụng vào thực hành được. Từ việc quan tâm đến thiết kế các nhiệm vụ PĐ có liên quan đến các loại PĐ do Canadas và cộng sự của ông đề xuất, nhóm nghiên cứu của Lin đã chỉ ra bốn nguyên tắc cốt lõi như sau [51], [53]:

Nguyên tắc quan sát: Các nhiệm vụ PĐ nên mang đến cho HS cơ hội quan sát một cách hệ thống các trường hợp riêng để có thể phát hiện ra quy tắc, quy luật nào đó.

Nguyên tắc xây dựng: Các nhiệm vụ PĐ nên tạo điều kiện để HS xây dựng kiến thức mới dựa trên kiến thức cũ.

Nguyên tắc biến đổi: Nhiệm vụ PĐ nên cung cấp cho HS các cơ hội để biến đổi các thuật toán, quy tắc, phát biểu, công thức,... thành cái mới. Chẳng hạn như biến đổi tiền đề hay kết luận trong một phát biểu, thay đổi một hay một vài nhân tố trong công thức nào đó.

Nguyên tắc suy xét: Những PĐ được tạo ra thông qua việc quan sát hay biến đổi công thức ban đầu có thể thiếu sự tin cậy. Do đó, trong thiết kế nhiệm vụ PĐ cần chú ý đến nguyên tắc này. Bởi vì việc yêu cầu HS xem xét lại các PĐ và điều chỉnh các PĐ chưa chính xác không những nhằm thu hút các PĐ đúng mà còn rèn luyện tính cẩn thận, kiên trì, tính chính xác của môn học, tư duy linh hoạt, óc hoài nghi trong khoa học, ... cho HS. Những câu hỏi sau đây là một số gợi ý để đảm bảo nguyên tắc suy xét trong thiết kế nhiệm vụ PĐ: "PĐ của em đã rõ ràng chưa?", "Em hãy giải thích tại sao em tin đó là PĐ đúng theo điều kiện được cho?", "liệu có thể khái quát hóa PĐ của em được không?", "em có tin PĐ của mình vẫn còn đúng khi một điều kiện nào đó được thay đổi?". Để trả lời được câu hỏi này HS phải có cơ sở khoa học để giải thích, nghĩa là các em đi CM cho PĐ của mình, trong quá trình giải thích có thể các em tìm được phản ví dụ chứng tỏ PĐ của mình vẫn chưa hợp lý, từ đó các em có thể thay đổi PĐ cho phù hợp.

1.6.2. Thiết kế của phán đoán

Fou-Lai Lin (2006) [51] đã từng nêu lên gợi ý cho việc thiết kế các nhiệm vụ PĐ. Theo tác giả, chúng ta có thể bắt đầu DH có sử dụng PĐ từ một trong hai điểm xuất phát: Từ một phát biểu đúng và từ một PĐ của người học.

Trong nhiệm vụ xây dựng tiền đề, kết luận là một loại nhiệm vụ khởi đầu bằng PĐ của người học. Trong nhiệm vụ kiểu này, HS sẽ được yêu cầu hoàn thành những mệnh đề có dạng "nếu p thì q", nhưng lại bị khuyết mất *p* hoặc *q*.

Ví dụ 1.20. Hoàn thành các mệnh đề sau đây để được mệnh đề đúng.

+ Cho tứ diện *ABCD*. Nếu $AB \perp (BCD)$, trong tam giác *BCD* vẽ đường cao *BE* và *DF*, trong tam giác *ADC* vẽ *DK* vuông góc với *AC* tại *K* thì .....(*điền hai cặp mặt phẳng vuông góc với nhau và sử dụng triệt để giả thiết của bài toán*).

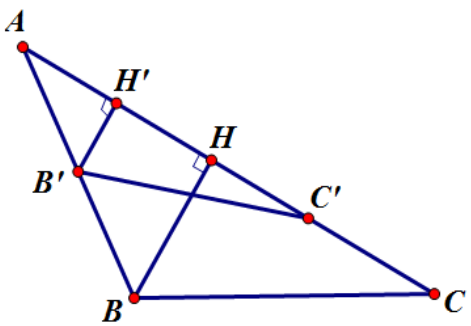
+ Cho hình chóp *S.ABCD*. Nếu ..... thì $BC \perp (SAB)$ và $BD \perp (SAC)$.

1.6.2.1. Phát biểu mệnh đề đúng như là sự bắt đầu cho ý tưởng của bài dạy

Ví dụ 1.21. Chúng tôi sử dụng công thức về tỉ lệ diện tích giữa hai tam giác $AB'C'$ và ABC để xây dựng ý tưởng cho bài dạy: Xác định công thức về tỉ lệ thể tích giữa hình tứ diện: $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = ?$ Chúng tôi thiết kế các bước sau đây để HS dự đoán và phát hiện công thức cũng như dự đoán các bước CM cho công thức:

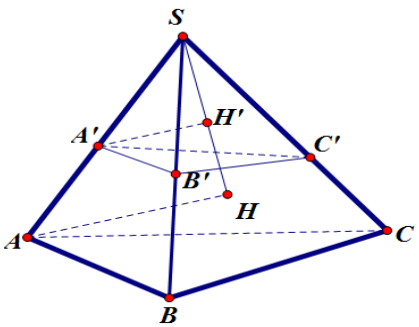
GV đưa ra các câu hỏi sau đây để HS PĐ:

+ Từ công thức tỉ lệ diện tích giữa hai tam giác $AB'C'$ và ABC (ở hình 1.27) là: $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$ (1), em hãy suy đoán công thức tỉ lệ thể tích giữa hai tứ diện $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}$ (ở hình 1.28)?



Hình 1.27

Nhiều em đã dự đoán đúng công thức $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}$ như sau: $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$ (2)



Hình 1.28

+GV: Em dựa vào căn cứ nào để PĐ công thức (2)?

Nhiều em trả lời: Dựa vào công thức (1) để suy đoán công thức (2). Các em dựa vào SL tương tự.

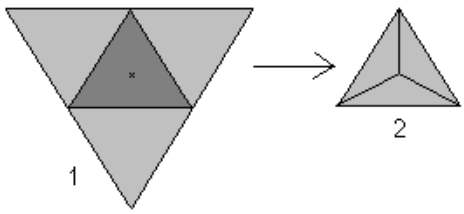
Các câu hỏi sau đây giúp HS dự đoán các bước CM cho công thức (2):

Các bước CM cho công thức (1)	*Dự đoán các bước CM cho công thức (2) nhờ tương tự các ý CM cho công thức (1)*
Công thức quen thuộc để tính diên tích tam giác là gì? $S=\frac{1}{2}h.a$ trong đó *h* là đường cao của tam giác và *a* là cạnh đáy tương ứng với đường cao. Hai tam giác *AB'C'* và *ABC* có các cạnh đáy nào cùng nằm trên một đường thẳng? Cạnh *AC'* và *AC* là hai cạnh cùng nằm trên đường thẳng. Hãy tính diện tích của hai tam giác *AB'C'* và *ABC* theo các cạnh đáy lần lượt là *AC'* và *AC*? $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}B'H'.AC'$ và $S_{AB'C'}=\frac{1}{2}BH.AC$. Lập tỉ lệ diện tích giữa hai tam giác trên để suy ra công thức cần CM? $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\frac{B'H'}{BH}.\frac{AC'}{AC}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$.	Công thức để tính thể tích của tứ diện là gì? $V=\frac{1}{3}B.h$ trong đó h là đường cao của tứ diện và B là diện tích đáy tương ứng với đường cao. Hai tứ diện *SA'B'C'* và *SABC* có hai mặt đáy nào cùng thuộc một mặt phẳng ? (*SB'C'*) và (*SBC*) cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính thể tích của các tứ diện *SA'B'C'* và *SABC* theo các mặt đáy lần lượt là (*SB'C'*) và (*SBC*)? $V_{SA'B'C'}=\frac{1}{3}A'H'.S_{SB'C'}$ và $V_{SA'B'C'}=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}$. Lập tỉ lệ thể tích giữa hai tứ diện trên để suy ra công thức cần dự đoán: $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}=\frac{A'H'}{AH}.\frac{S_{SB'C'}}{S_{SBC}}=\frac{A'H'}{AH}.\frac{\frac{1}{2}.SB'.SC'.\sin A}{\frac{1}{2}.SB.SC.\sin A}$ $=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

1.6.2.2. Bắt đầu với chính phán đoán của mình

Ví dụ 1.22. Để khám phá tam giác và tứ diện, hoạt động khám phá được thiết kế theo các bước sau đây:

- Gấp một tam giác đều để tạo thành một tứ diện



Hình 1.29: Gấp một tam giác đều để tạo thành một tứ diện

- GV đặt câu hỏi:

+ Em có thể gấp một tam giác cân để thành một tứ diện được không?

+ Với tam giác vuông cân thì thế nào?

+ Các hình tam giác khác có thể gấp được thành tứ diện được không? Hãy thể hiện PĐ của mình.

+ Liệu tứ giác có gấp được thành tứ diện không?

* ***PĐ và cấu trúc thành phần của PĐ sẽ khuyến khích HS*** [51]:

- Xây dựng các ví dụ điển hình;
- Tổ chức và phân loại tất cả các loại ví dụ;
- Nhận ra đặc điểm cấu trúc của ví dụ hỗ trợ;
- Tìm phản ví dụ khi nhận ra có điều mâu thuẫn của vấn đề;
- Tự điều chỉnh các khái niệm;
- Đánh giá việc đã làm và tư duy của chính mình;
- Hình thành phát biểu mệnh đề Toán học;
- Tưởng tượng/ngoại suy/khám phá mệnh đề;
- Nắm bắt được các nguyên tắc cơ bản của Toán học;

PĐ khuyến khích người học phải tư duy và xây dựng thái độ học tập tích cực bởi nó là nền tảng của sự đổi mới, sáng kiến và PĐ thật sự là một chiến lược học tập thích hợp cho sự đổi mới. PĐ thay đổi thái độ tích cực của người học và luôn tiếp cận với xu hướng đổi mới.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Luận án đã đề cập đến khái niệm PĐ và LLCCC trong quá trình nhận thức của HS. Từ đó, xây dựng các hoạt động chủ yếu dẫn tới PĐ, LLCCC và đề xuất quy trình thực hiện để tạo môi trường PĐ cho HS. Luận án cũng đã đưa ra hệ thống các khái niệm liên quan đến NLPĐ và LLCCC từ đó để xác định những biểu hiện cơ bản của NLPĐ và LLCCC cần rèn luyện cho HS.

Luận án làm rõ phạm vi sử dụng PĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT được thể hiện thông qua các tình huống điển hình trong DH môn Toán.

Đồng thời, qua khảo sát thực tiễn (trình bày ở chương 2) đã khẳng định việc DH theo hướng rèn luyện cho HS NLPĐ và LLCCC ở trường THPT cần phải quan tâm nghiên cứu một cách sâu sắc. Hơn nữa, thông qua việc khảo sát này đã làm rõ hơn những biểu hiện của NLPĐ và LLCCC trong DH toán ở trường THPT.

CHƯƠNG 2
KHẢO SÁT NGHIÊN CỨU

2.1. Mục đích của khảo sát

Việc thiết kế khảo sát nghiên cứu nhằm mục đích sau đây:

+ Nghiên cứu cơ sở thực tiễn của vấn đề nghiên cứu mà không phải chỉ dựa trên kết quả của những công trình nghiên cứu trước đó;

+ Biết được những khó khăn mà các em thường gặp phải khi người học tham gia PĐ và LLCCC;

+ Làm cơ sở thực tiễn để xây dựng các biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC (các biện pháp sẽ được đề xuất ở chương 3) theo hướng các biện pháp sẽ khắc phục được những khó khăn mà các em thường gặp.

2.2. Đối tượng tham gia khảo sát

Chúng tôi tiến hành khảo sát chủ yếu trên hai đối tượng:

+ Lựa chọn các lớp khối 11: Chuyên Lý, chuyên Văn, chuyên Nga và lớp 10 chuyên Toán của trường THPT chuyên Nguyễn Huệ- Hà Đông - Hà Nội. Mỗi lớp có 30 HS. Lớp 10 chuyên Toán thì NL Toán học của các em rất tốt và tương đối đồng đều, các em được học chuyên sâu về Toán. Lớp 11 chuyên Lý thì NL Toán học của các em khá đồng đều nhưng chưa chuyên sâu về kiến thức môn Toán. Các lớp 11 chuyên Văn, chuyên Nga thì NL Toán học của các em không đồng đều, kiến thức của môn Toán còn nhiều hạn chế do các em tập trung chuyên sâu cho các môn xã hội. Trước khi tiến hành khảo sát các lớp này chúng tôi đã bổ sung cho các em một số kiến thức HH liên quan đến nội dung khảo sát.

+ GV giảng dạy môn Toán của trường THPT chuyên Nguyễn Huệ - Hà Đông - Hà Nội.

2.3. Cách thức tổ chức khảo sát

Trước khi tiến hành khảo sát nghiên cứ chúng tôi đã làm quen với lớp. Chúng tôi nói rõ mục đích nghiên cứu để HS hiểu và giải đáp những thắc mắc của các em về nội dung khảo sát.

Chúng tôi thiết kế các nội dung để HS PĐ và tổ chức tiến hành trong các giờ lên lớp để các em tham gia khảo sát tại phòng học của mình.

Chúng tôi chia lớp học thành các nhóm nhỏ để các em tham gia trao đổi và thảo luận với nhau để PĐ và giải quyết nhiệm vụ đặt ra. Theo quan điểm của chúng

tôi, kích thước mỗi nhóm từ ba đến bốn em là phù hợp bởi vì số lượng này là vừa đủ để tạo ra bầu không khí thảo luận. Đồng thời nó cũng không quá lớn để bất cứ thành viên nào của mỗi nhóm cảm thấy mình bị lép vế hoặc dư thừa. Ngoài ra, chúng tôi còn tham khảo ý kiến của GV môn Toán và GV chủ nhiệm về việc phân chia nhóm cho phù hợp với NL, tính cách và mối quan hệ của các em sao cho có sự hài hòa giữa các nhóm. Chúng tôi đã chia lớp 30 HS thành 10 nhóm, mỗi nhóm có ba HS, phiếu học tập được phát cho từng thành viên của mỗi nhóm. Trong quá trình các em làm viêc chúng tôi quan sát quá trình làm việc của các em. Sau khi các em hoàn thành công việc, chúng tôi tiến hành phỏng vấn để thấy được những khó khăn khi tham gia các hoạt động PĐ, cách suy nghĩ của các em khi GQVĐ đặt ra, các xu hướng PĐ giữa các nhóm.

2.4. Công cụ khảo sát

Chúng tôi thiết kế các công cụ để khảo sát NLPĐ và LLCCC của HS ở các lớp khảo sát. Qua đó, chúng tôi trải nghiệm thực tiễn của vấn đề nghiên cứu, biết được những khó khăn của các em khi tham gia các hoạt động PĐ và SL. Từ đó đề xuất các biện pháp bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS phù hợp với thực tiễn của vấn đề nghiên cứu, khắc phục những khó khăn khi các em tham gia các hoạt động PĐ và LLCCC. Công cụ khảo sát nghiên cứu mà chúng tôi thiết kế gồm có:

+ Phiếu học tập (*Chi tiết ở phụ lục 1*);

+ Bảng hỏi dành cho GV (*Chi tiết ở phụ lục 2*);

+ Câu hỏi phỏng vấn dành cho HS (*Chi tiết ở phụ lục 3*).

2.5. Thời gian khảo sát

Các buổi khảo sát được tiến hành từ ngày 02/4/2014 đến 29/4/2014.

Bảng 2.1. Thời gian khảo sát

Buổi khảo sát	Ngày tiến hành	Nội dung thực hiện
Buổi thứ nhất	2/4/2014	Tìm hiểu và làm quen với các lớp tham gia khảo sát. GV trả lời câu hỏi.
Buổi thứ hai	9/4/2014	HS tham gia thực hiện phiếu học tập
Buổi thứ ba	16/4/2014	HS tham gia thực hiện phiếu học tập
Buổi thứ tư	25/4/2014	HS tham gia thực hiện phiếu học tập
Buổi thứ năm	29/4/2014	Phỏng vấn HS ở các lớp khảo sát

2.6. Thu thập dữ liệu và các tiêu chí đánh giá

2.6.1. Thu thập dữ liệu

Để phục vụ cho việc nghiên cứu chúng tôi đã tiến hành thu thập dữ liệu từ bài làm của HS trên giấy, từ việc phỏng vấn HS trước và sau khi khảo sát, từ câu trả lời của GV ở trong bảng hỏi đã được thiết kế trước đó. Chúng tôi cũng đã ghi lại những điểm nổi bật thông qua việc quan sát các em làm việc trong nhóm ở các buổi khảo sát.

Để xác định mức độ phát triển thực sự của HS trong quá trình PĐ, các nhiệm vụ đưa ra cũng tuân theo trình tự: Phát phiếu học tập – Thảo luận giữa các thành viên trong mỗi nhóm– Thảo luận trước lớp học – Tham gia trả lời câu hỏi phỏng vấn. Trong thảo luận nhóm, chúng tôi chủ yếu đóng vai trò quan sát, chỉ giải thích nếu có vài chi tiết không rõ ràng nhiệm vụ đặt ra cho các em. Do đó bài làm của các nhóm tương ứng với mỗi nhiệm vụ được chia thành hai phần để phân tích:

+ Phần trả lời của các em trong mỗi nhóm sau khi phát phiếu học tập.

+ Phần trả lời câu hỏi phỏng vấn của các nhóm sau khi thảo luận trước lớp học.

2.6.2. Các tiêu chí đánh giá cho các bước của quá trình phán đoán có căn cứ

2.6.2.1. Các tiêu chí phân tích cho mỗi bước phán đoán có căn cứ nhờ quy nạp

Chúng tôi chọn cách phân tích kết quả của bài làm tương ứng với mỗi phương thức theo các bước cụ thể của từng loại PĐ. Mặt khác trong chủ đề SL quy nạp, Canadas và Castro đã lập một bảng giới thiệu chi tiết các tiêu chí tương ứng với mỗi bước của mô hình. Vì thế trong mỗi phần tiếp theo, chúng tôi sẽ nêu lên bảng chứa các tiêu chí phân tích tương ứng với mỗi bước cụ thể trong mô hình của loại PĐ đang xét. Dựa vào ý tưởng do Canadas và Castro (2005) [40] giới thiệu chúng tôi trình bày bảng tiêu chí của các bước trong quá trình PĐ nhờ SL quy nạp được thể hiện trong bảng dưới đây:

Bảng 2.2. Các tiêu chí phân tích tương ứng cho mỗi bước PĐ có căn cứ nhờ quy nạp [40]

Các bước	**Các tiêu chí**
Bước 1: *Quan sát các trường hợp riêng*	+ HS tự quan sát để tìm ra vấn đề hay GV gợi ý để tìm ra vấn đề + Số trường hợp riêng được quan sát hay được khảo sát. + Loại trường hợp riêng được khảo sát.

Bước 2: *Kiểm chứng kết quả dự đoán ở một số trường hợp riêng*	+ HS sử dụng SL để kiểm chứng kết quả dự đoán của mình.
Bước 3: *Sắp xếp trường hợp riêng một cách có hệ thống*	+ HS sắp xếp các trường hợp riêng. + HS sắp xếp các trường hợp riêng tuân theo quy tắc. + HS có lập biểu bảng.
Bước 4: *Tìm kiếm và PĐ quy luật*	Nêu được căn cứ để tìm kiếm quy luật
Bước 5: Hình thành PĐ	Nêu được kiến thức đã học được dùng để hình thành PĐ.
Bước 6: Khái quát hóa PĐ	Nêu được đặc tính chung của các trường hợp giống nhau.
Bước 7: *CM trong trường hợp tổng quát*	+ HS dùng SL để CM. + Việc CM của HS phải chính xác và có hiệu quả.

Chúng tôi cho rằng bước tìm kiếm và dự đoán quy luật là cần thiết. Nếu không thực hiện được bước này HS sẽ không tiến xa được trong quá trình SL quy nạp mà cụ thể là đạt được sự khái quát hóa. Do đó, việc có hay không thực hiện bước này là một tiêu chí để đánh giá mức độ thành thạo SL quy nạp của các em.

2.6.2.2. Các tiêu chí phân tích cho mỗi bước của phán đoán có căn cứ nhờ suy luận tương tự

Từ việc xem xét mô hình các bước do Canadas cùng với cộng sự đề xuất cũng như các bước của con đường SL tương tự theo quan điểm của Gentner (1983) [45], chúng tôi quyết định xem xét, điều chỉnh và đưa ra tiêu chí cho các bước của của quá trình PĐ nhờ tương tự như sau:

Bảng 2.3. Các tiêu chí phân tích tương ứng cho mỗi bước PĐ có căn cứ nhờ SL tương tự

Các bước	**Các tiêu chí**
Bước 1: *Quan sát hai đối tượng cần so sánh*	Các em có khả năng quan sát hai đối tượng cần so sánh
Bước 2: *Tìm kiếm cấu trúc giống nhau giữa hai đối tượng*	+ HS phát hiện được những điều tương tự nào giữa hai đối tượng. + Sự giống nhau đó ở hình thức hay giống nhau về thuộc tính, cấu trúc + Các em có lý giải được vì sao chúng tương tự nhau.
Bước 3: *Tìm kiếm một vài thuộc tính khác quen thuộc ở đối tượng thứ nhất*	+ Các em tìm được thuộc tính khác ở đối tượng thứ nhất. + Thuộc tính các em tìm được giúp ích cho việc PĐ
Bước 4: *PĐ rằng đối tượng còn lại cũng có thuộc tính tương tự như thế.*	Các em tìm được căn cứ để PĐ thuộc tính đó cũng có ở đối tượng thứ hai.
Bước 5: *Kiểm tra tính đúng/sai của PĐ bằng cách CM dựa vào SL Toán học*	+ Các em dựa vào SL để kiểm chứng. + Việc kiểm chứng của các em chính xác theo SL Toán học + Việc đưa ra SL để kiểm chứng giả thuyết có liên quan đến quá trình PĐ ở bước 4.
Bước 6: *Khẳng định PĐ đó là đúng hoặc sai*	Các em khẳng định được PĐ của mình đúng hay sai.

Chúng tôi quan tâm đến việc HS chú ý những đặc điểm giống nhau về hình thứuc hay cấu trúc của hai đối tượng đưa ra. Các nghiên cứu cho thấy rằng, trong quá trình SL tương tự những người chưa thành thạo thì chú ý những điểm giống nhau ở bề ngoài. Còn khi mức độ thành thạo tăng lên thì người học quan tâm đến đặc điểm giống nhau thuộc về cấu trúc.

2.6.2.3. Các tiêu chí phân tích cho mỗi bước của phán đoán có căn cứ nhờ khái quát hóa

Chúng tôi thiết kế và đưa ra tiêu chí phân tích cho mỗi bước của PĐ theo con đường khái quát hóa, được thể hiện ở bảng 2.4 như sau:

Bảng 2.4. Các tiêu chí phân tích tương ứng cho mỗi bước PĐ có căn cứ theo con đường khái quát hóa

Các bước	**Các tiêu chí**
Bước 1: *Quan sát các trường hợp riêng*	Các em có khả năng quan sát các trường hợp riêng.
Bước 2: *Phân tích các trường hợp riêng*	+ Các em có tìm được mối liên hệ giữa các trường hợp riêng dựa vào phân tích. Các em tìm được cơ sở để phân tích. + Mối liên hệ các em tìm được giúp ích cho việc PĐ cho trường hợp khái quát.
Bước 3: *PĐ trường hợp khái quát*	+ Các em tìm được căn cứ cho PĐ của mình và nó có liên quan đến bước phân tích. + PĐ của các em là hợp lý
Bước 4: *Kiểm tra tính đúng/sai của PĐ bằng cách CM dựa vào SL Toán học*	+ Sử dụng lập luận hợp lý để kiểm chứng. + Việc kiểm chứng là chính xác.
Bước 5 *Khẳng định PĐ đó là đúng hoặc sai*	Khẳng định được PĐ của mình đúng hoặc sai

2.6.2.4. Các tiêu chí phân tích cho mỗi bước xây dựng giả thuyết của một bài toán bằng cách xem xét giả thiết và kết luận dưới khía cạnh khác nhau

Chúng tôi thiết kế và đưa ra tiêu chí phân tích cho mỗi bước xây dựng giả thuyết của một bài toán bằng cách xem xét giả thiết và kết luận theo khía cạnh khác, được thể hiện ở bảng 2.5 như sau:

Bảng 2.5. Các tiêu chí phân tích tương ứng cho mỗi bước xây dựng giả thuyết của một bài toán

Các bước	Các tiêu chí
Bước 1: *Tách một bộ phận của của đối tượng ra khỏi đối tượng đó*	+ Việc tách một bộ phận của đối tượng HH nào đó thỏa mãn được yêu cầu của GV. Hình vẽ của phần được tách là chính xác. Các em bảo toàn được giả thuyết và kết luận của bài toán gốc sau khi tách bộ phận đó ra khỏi đối tượng.
Bước 2: *Điều chỉnh giả thiết và kết luận của đối tượng được tách ra bằng cách nhìn nó dưới khía cạnh khác.*	+ Các em huy động linh hoạt các kiến thức để điều chỉnh giả thiết và kết luận, đảm bảo được sự khác biệt so với giả thiết và kết luận của bài toán gốc. + Giả thuyết được xây dựng là có căn cứ. + Điều chỉnh giả thiết và kết luận đảm bảo cho việc xây dựng giả thuyết của bài toán.
Bước 3: *Phát biểu bài toán sau khi đã hoàn chỉnh*	Phát biểu bài toán được hoàn chỉnh và hợp lý.
Bước 4: *GQVĐ của bài toán được xây dựng*	+ Các em dựa vào SL Toán học để GQVĐ một cách hợp lý. + Kiến thức để giải quyết bài toán chính xác và logic.
Bước 5 *Khẳng định hoặc bác bỏ giả thuyết*	Các em khẳng định hoặc bác bỏ được giả thuyết.

2.7. Kết quả khảo sát

2.7.1. Kết quả trả lời bảng hỏi của giáo viên

+ Khi dạy các kiến thức Toán học, 25% số GV tổ chức giờ học có sử dụng hoạt động PĐ ở mức độ thỉnh thoảng. Nhiều GV chưa có nhu cầu sử dụng PĐ trong hoạt động DH của mình bởi vì hạn chế về mặt thời gian, nội dung chương trình của môn Toán khá nặng. Hơn thế nữa họ chưa biết soạn giáo án cho giờ dạy rèn luyện hoạt động PĐ là như thế nào. Tuy nhiên, có 65% số GV ở trường THPT đã quan tâm đến những biểu hiện của NLPĐ của HS và thấy được hữu ích của chúng trong hoạt động dạy và học.

+ Khi DH khái niệm, định lý đa số GV tập trung dạy HS vận dụng trực tiếp các khái niệm, định lý vào việc giải bài tập trong SGK, bài tập nâng cao. 37% số GV giúp HS nắm được ý nghĩa của các khái niệm, định lý. Nhiều GV vẫn chưa chú trọng dạy HS tự xây dựng giả thuyết của khái niệm, định lý từ kiến thức đã có của người học.

+ Khi dạy giải bài tập, 30% số GV chưa khuyến khích HS tìm nhiều lời giải khác nhau của một bài toán, đa số GV tập trung đến việc dạy HS nắm được phương pháp giải bài tập Toán.

+ Có 74% số GV có sử dụng các hoạt động biến đổi hình thức của bài toán nhằm quy lạ về quen, hoạt động khái quát hóa bài toán.

+ Khi dạy Toán, 61% số GV chỉ quan tâm dạy kiến thức Toán mà HS đang học, chưa để ý đến các giai đoạn phát triển của kiến thức Toán đang dạy.

+ Có 68% số GV dạy toán ở trường THPT chỉ chú ý dạy phục vụ cho việc thi cử, đặc biệt là thi đại học và thi tốt nghiệp. GV chưa thực sự chú trọng việc bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS, chưa chú ý khai thác, nhìn nhận vấn đề theo nhiều góc độ khác nhau, chưa rèn luyện nhiều cho HS về NL liên tưởng giữa các đối tượng, NL nhận ra sự tương tự và sự khác nhau giữa các tình huống.

+ Trong DH Toán, 65% số GV đã quan tâm rèn luyện cho HS các NL chuyển việc giải bài toán không gian về bài toán phẳng.

+ Khi dạy nội dung HH không gian có 72% số GV đã chú ý nhiều đến mối liên hệ giữa HH phẳng và HH không gian. Mối liên hệ được GV quan tâm và HS sử dụng nhiều nhất đó là kẻ thêm đường phụ để liên kết giữa giả thiết và kết luận.

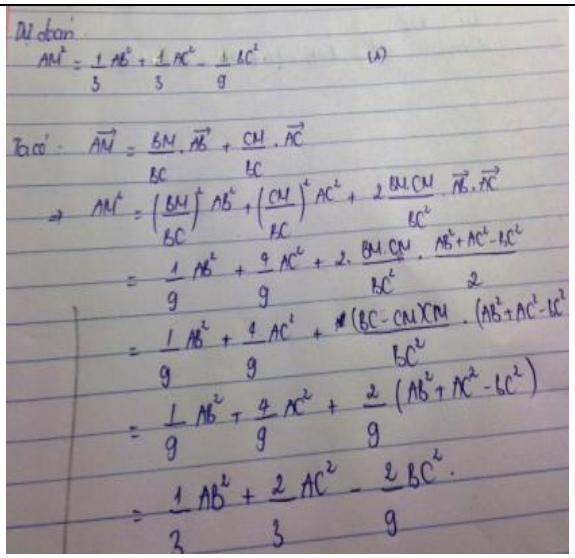
Từ những điều trên, chúng ta có thể nhận thấy rằng: Việc bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC ở trường THPT bước đầu đã được GV quan tâm nhưng còn thiếu tính hệ thống và đồng bộ, chưa nhận thức đúng mức về ý nghĩa và tầm quan trọng của nó.

2.7.2. Kết quả thảo luận và bài làm của học sinh qua các buổi khảo sát

2.7.2.1. Buổi khảo sát học sinh thực hiện phiếu học tập số 1

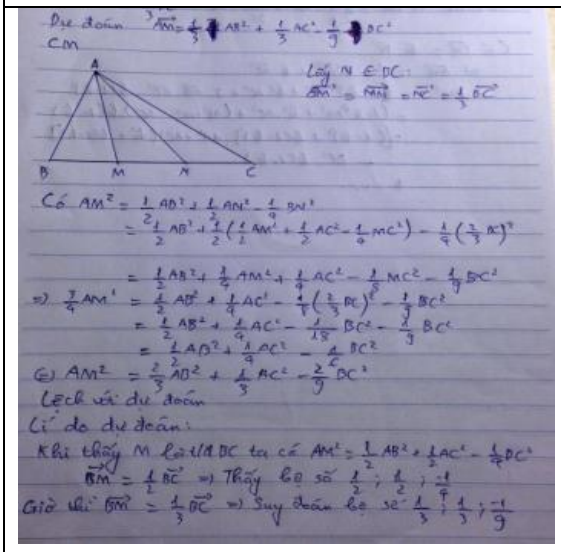
Chúng tôi khảo sát vấn đề nghiên cứu tại lớp 10 chuyên Toán của trường THPT Nguyễn Huệ. Chúng tôi chia lớp 10 nhóm, mỗi nhóm có 3 HS. Mỗi nhóm các em cùng nhau hợp tác để dự đoán và GQVĐ đã đặt ra.

Bảng 2.6. HS của nhóm 1 trình bày PĐ cho phiếu học tập số 1

Bài làm của HS	**Phân tích quá trình PĐ**
 Dự đoán $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2$ (1) Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{BM}{BC}.\overrightarrow{AB} + \frac{CM}{BC}.\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow AM^2 = \left(\frac{BM}{BC}\right)^2 AB^2 + \left(\frac{CM}{BC}\right)^2 AC^2 + 2\frac{BM.CM}{BC^2}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $= \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + 2.\frac{BM.CM}{BC^2}.\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$ $= \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + \frac{(BC-CM)CM}{BC^2}.(AB^2+AC^2-BC^2)$ $= \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + \frac{2}{9}(AB^2+AC^2-BC^2)$ $= \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$.	PĐ của HS ở đây đóng vai trò kết luận của mỗi trường hợp riêng. HS dựa vào trực giác công thức của mình để đưa ra PĐ cho kết quả bài toán mới. Các em lập luận rằng do việc quan sát các hệ số của công thức: $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$ với $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ nên các em đưa ra PĐ cho bài toán mới trong trường hợp $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ nên: $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2$.

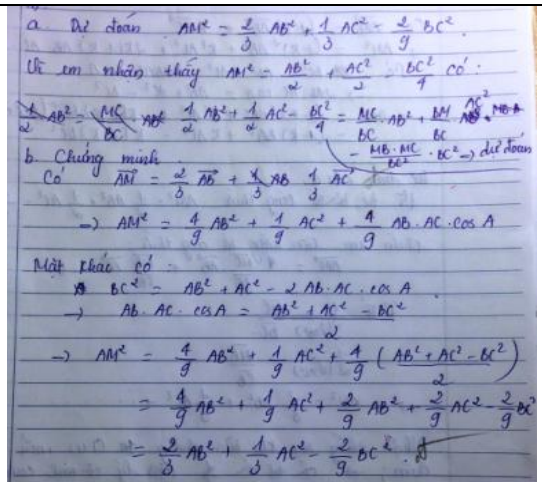
Ở nhóm này các em rất háo hức việc đi CM công thức để kiểm chứng kết quả vừa dự đoán. CM của các em dẫn đến công thức: $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2$. Việc tìm ra công thức khác với công thức dự đoán ban đầu của nhóm 1 đã khiến các em nhận định rằng đã dự đoán kết quả của bài toán là sai. Các em thừa nhận việc dự đoán của mình mang tính cảm tính vì các em không dựa trên cơ sở kiến thức chắc chắn nào cả. Tuy nhiên việc dự đoán trước khi CM lại đóng vai trò thúc đẩy việc đi tìm lời giải cho bài toán để đối chiếu kết quả vừa dự đoán.

Bảng 2.7. HS của nhóm 2 trình bày PĐ cho phiếu học tập số 1

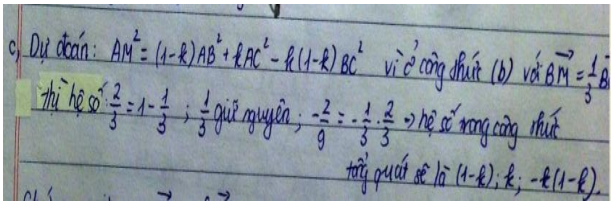
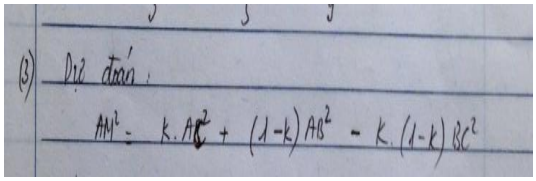
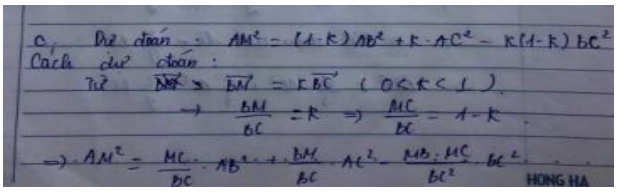
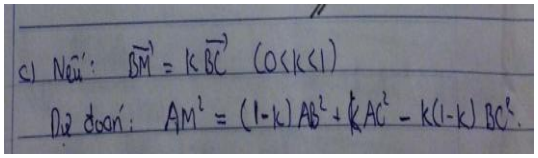
Bài làm của HS	**Phân tích quá trình PĐ**
 Dự đoán $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2$ CM Lấy N ∈ BC: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ Có $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AM^2 - \frac{1}{4}BM^2$ $= \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AM^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}MC^2\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}BC\right)^2$ $= \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{4}AM^2 + \frac{1}{4}AC^2 - \frac{1}{8}MC^2 - \frac{1}{9}BC^2$ $\Rightarrow \frac{3}{4}AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}BC\right)^2 - \frac{1}{9}BC^2$ $= \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 - \frac{1}{18}BC^2 - \frac{1}{9}BC^2$ $= \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 - \frac{1}{6}BC^2$ $\Leftrightarrow AM^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$ Lệch với dự đoán Lí do dự đoán: Khi thấy M là trung điểm BC ta có $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$ $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow$ Thấy hệ số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{4}$ Giờ thì $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow$ Suy đoán hệ số $\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{-1}{9}$	Cũng tương tự như nhóm 1, các em cũng lập luận rằng: Khi thấy *M* là trung điểm của *BC* ta có: $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$ và thấy các hệ số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}$. Bây giờ với trường hợp $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ thì suy đoán các hệ số sẽ là $\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}$. Với nhóm này, các em dự đoán là: $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2$.

Tuy nhiên việc xác nhận công thức của nhóm 2 khá thú vị. Tri giác về HH của các em khá tốt. Khi chúng tôi hỏi lý do vì sao các em gọi *N* là trung điểm *MC*. Các em trả lời rằng nhận thấy bài toán này được biến đổi từ bài toán quen thuộc (*). Từ đó các em suy ra rằng chuyển bài toán này về bài toán (*) bằng cách gọi *N* là trung điểm MC, khi đó M là trung điểm của *BN*. Áp dụng công thức (*) hai lần sẽ dẫn đến kết quả cần tìm.

Bảng 2.8. HS của nhóm 3 trình bày PĐ cho phiếu học tập số 1

Bài làm của HS	**Phân tích quá trình PĐ**
	Việc dự đoán của nhóm 3 khá thuận lợi và dễ dàng. Các em cho biết việc các em dự đoán nhanh công thức vì các em dựa vào công thức: $AM^2 = \frac{MC}{BC}AB^2 + AC^2 - \frac{MC.BM}{BC^2}.BC^2$. Các em CM công thức cũng trùng với kết quả mà các em đã dự đoán. Việc này đã khiến các em rất hào hứng về công việc mình đã làm.

Bảng 2.9. HS một số nhóm trình bày PĐ cho công thức ở trường hợp khái quát

Nhóm 1	**Nhóm 2**
	
Nhóm 3	**Nhóm 4**
	

Việc PĐ trường hợp khái quát của các nhóm đều trả lời đúng. Sau khi khảo sát các trường hợp riêng, các em đã có cơ sở vững chắc để dự đoán trường hợp khái quát. Và việc các em đi tìm lời giải cho trường hợp khái quát diễn ra khá nhanh.

Khâu dự đoán cho những trường hợp riêng đã tạo cơ hội để các hiểu sâu hơn vấn đề khái quát cũng như là động lực thúc đẩy để các em tìm cách GQVĐ dự đoán.

2.7.2.2. Buổi khảo sát học sinh thực hiện phiếu học tập số 2

Chúng tôi khảo sát vấn đề nghiên cứu tại lớp 11 chuyên Lý, 11 chuyên Văn và 11 chuyên Nga của trường THPT chuyên Nguyễn Huệ. Chúng tôi chia lớp thành mười nhóm, mỗi nhóm có ba HS. Mỗi nhóm các em cùng nhau hợp tác để dự đoán và GQVĐ đã đặt ra.

a. *Bài làm của một số nhóm về PĐ nhờ tương tự và kiểm chứng PĐ bởi CM bằng kiến thức Toán học*:

Trong quá trình khảo sát chúng tôi nhận thấy rất nhiều em đã tìm được những điểm tương tự giữa hai bài toán với những lập luận riêng của các em theo các xu hướng sau đây:

Xu hướng 1:

Nhóm 1,3,4,5, 7 trả lời các em cho rằng khái niệm tam giác trong mặt phẳng tương tự với khái niệm tứ diện trong không gian vì em nhận thấy mỗi mặt của tứ diện đều là một tam giác, mỗi mặt của tứ diện cũng chính là một mặt phẳng nên hai khái niệm này tương tự nhau.

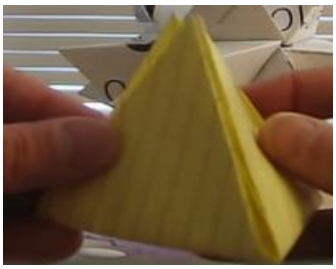
Xu hướng 2: Nhóm 8,9, 10: Không giải thích được nhưng các em cũng cho rằng khái niệm tam giác trong mặt phẳng tương tự với khái niệm tứ diện trong không gian.

Xu hướng 3: Nhóm 2 và nhóm 6 giải thích sự giống nhau của hai bài toán như sau:

+ *Khái niệm tam giác trong mặt phẳng tương tự với khái niệm tứ diện trong không gian* (mỗi mặt của tứ diện là một tam giác). Trong quá trình khảo sát chúng tôi nhận được phân tích sự tương tự giữa tam giác và tứ diện từ phía các em như sau:

- Gấp một tam giác đều có thể tạo thành một tứ diện

Hình 2.1



Hình 2.2

- Các em tự đặt câu hỏi cho nhóm của mình:

"Có thể gấp một tam giác cân cho trước thành một tứ diện được không?"; "Với tam giác vuông cân thì thế nào?", "Liệu tam giác thường có gấp được thành tứ diện không?"

- Từ đó các em nhận định rằng như thế khái niệm tam giác trong HH phẳng tương tự với khái niệm tứ diện trong không gian.

+ 10 nhóm đều nhận thấy rằng: *M* là trung điểm của BC thì $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ và *H* là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Vì thế *khái niệm trung điểm của đoạn thẳng tương tự với khái niệm trọng tâm của tam giác ABC.*

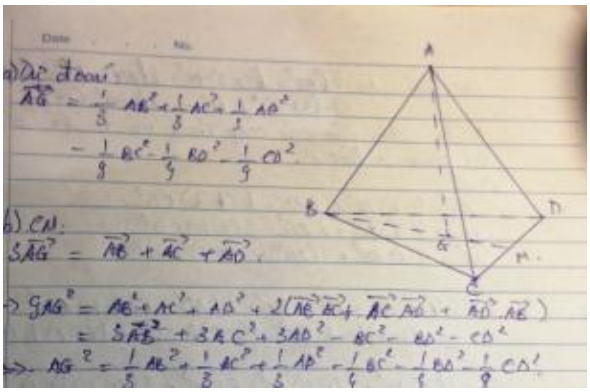
Khi được hỏi dư đoán AH sẽ được tính theo những cạnh nào, đã xảy ra hai xu hướng trả lời giữa các nhóm như sau:

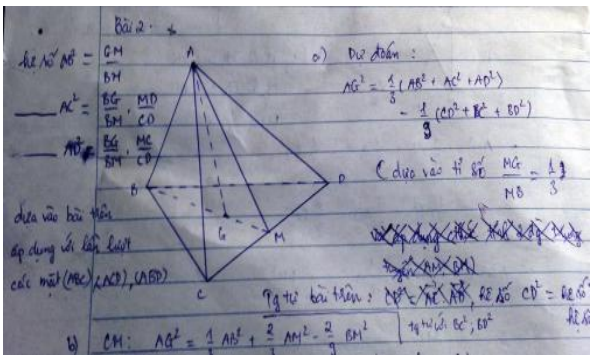
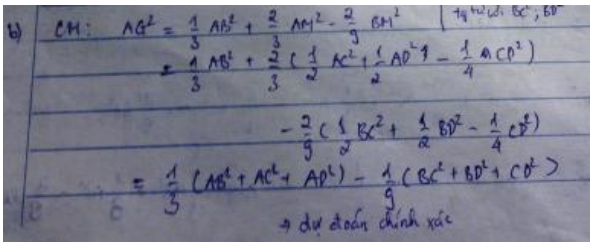
+ **Xu hướng 1** (nhóm 1,3,5,6,7,8,9): Các em dự đoán AH^2 được tính theo các cạnh bên của tứ diện: *AB, AC, AD.*

+ **Xu hướng 2** (nhóm 2,4,10): Các em dự đoán AH^2 được tính theo tất cả các cạnh của tứ diện (các cạnh bên và các cạnh đáy): *AB, AC, AD, BC, BD, CD.*

Sau khi được đưa ra thảo luận trước lớp các nhóm 1,3,5,6,7,8 và 9 đồng ý theo xu hướng thứ 2 là hợp lý.

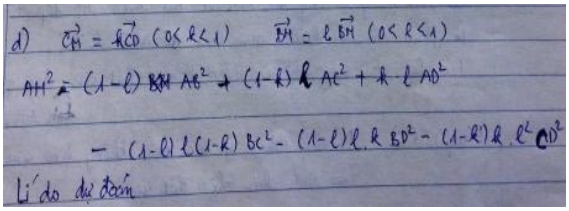
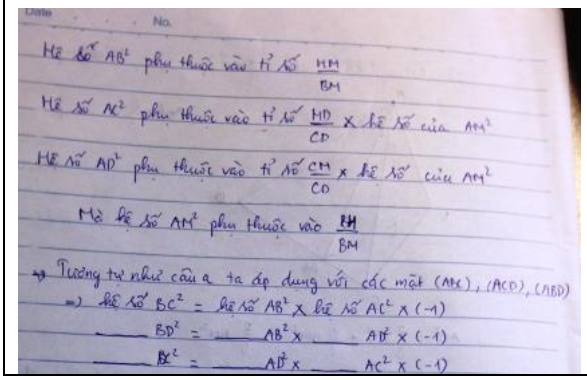
Bảng 2.10. Bài làm của một số nhóm dự đoán và kiểm chứng dự đoán cho công thức tính *AH*

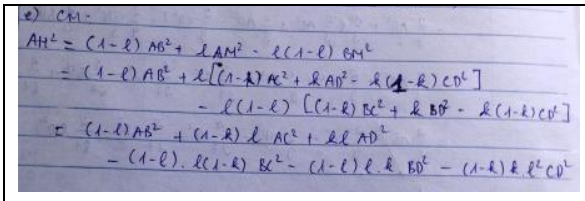
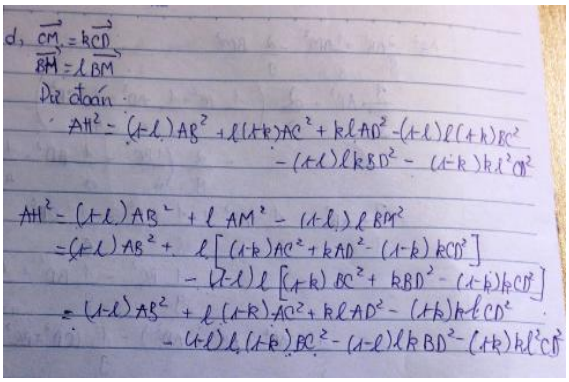
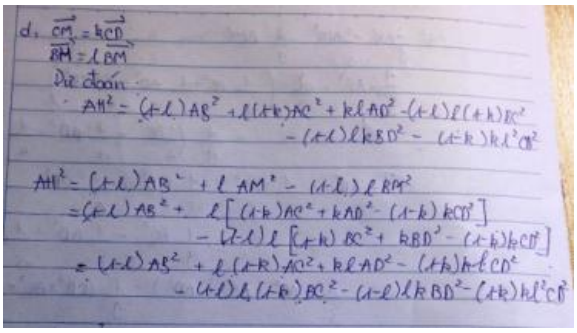
Bài làm của HS	**Phân tích quá trình PĐ**
Nhóm 1:  a) Dự đoán: $\overrightarrow{AG}^2 = \frac{1}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2+\frac{1}{3}AD^2$ $-\frac{1}{9}BC^2-\frac{1}{9}BD^2-\frac{1}{9}CD^2$ b) CM: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ $\Rightarrow 9AG^2 = AB^2+AC^2+AD^2+2(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB})$ $= 3\overrightarrow{AB}^2+3AC^2+3AD^2-BC^2-BD^2-CD^2$ $\Rightarrow AG^2 = \frac{1}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2+\frac{1}{3}AD^2-\frac{1}{9}BC^2-\frac{1}{9}BD^2-\frac{1}{9}CD^2$	+ PĐ của HS ở đây đóng vai trò kết luận của bài toán. HS dựa vào trực giác công thức của mình để đưa ra PĐ cho kết quả bài toán mới. Đa số các nhóm đều thiết lập được công thức dự đoán: $AH^2=\frac{1}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2+\frac{1}{3}AD^2-\frac{1}{9}BC^2-\frac{1}{9}BD^2-\frac{1}{9}CD^2$ + Phần CM của các em có cùng kết quả với dự đoán của chính mình.

Nhóm 2:  	Nhóm này cũng dự đoán tương tự với kết quả ở trên và cách giải thích dự đoán được kết quả như sau: Hệ số của AB^2 là: $\frac{HM}{BM}$ Hệ số của AC^2 là: $\frac{BH}{BM}.\frac{MD}{CD}$ Hệ số của AD^2 là: $\frac{BH}{BM}.\frac{MC}{CD}$ Hệ số của BC^2 là tích của các hệ số $(-1).AB^2.AC^2$ Tương tự với hệ số của CD^2, BD^2 lập luận tương tự như BC^2. Tương tự như nhóm trên phần CM của các em cũng có cùng kết quả với dự đoán.

b. Bài làm của một số nhóm về PĐ công thức khái quát và kiểm chứng tính đúng/sai của PĐ bằng CM Toán học

Bảng 2.11. Bài làm của một số nhóm PĐ công thức khái quát và kiểm chứng PĐ bằng CM Toán học

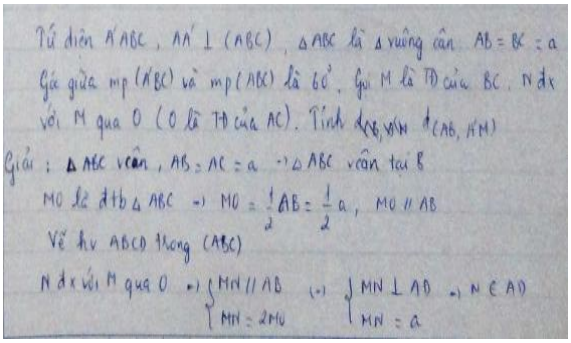
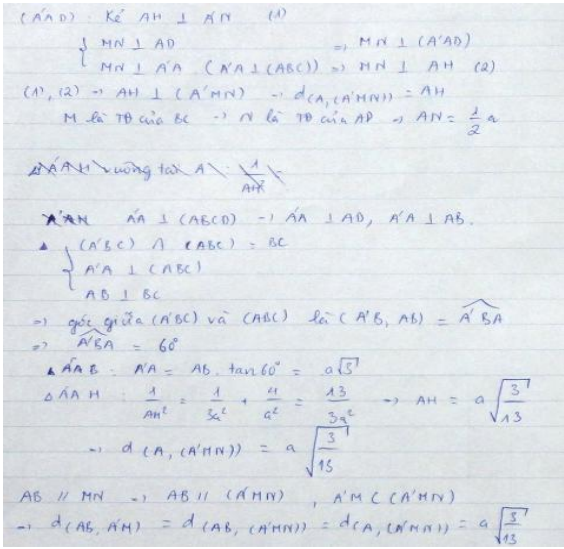
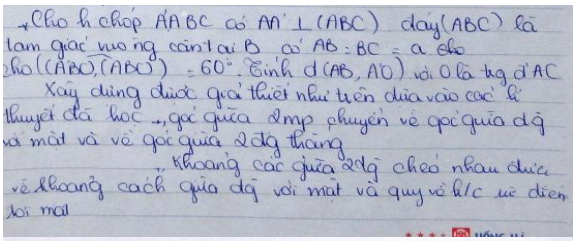
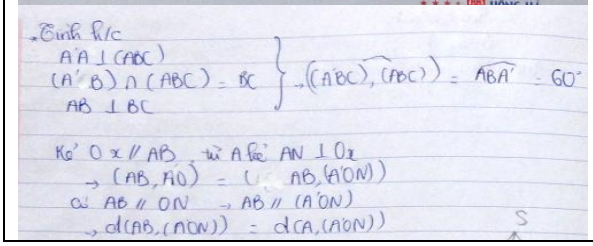
Nhóm 1:  	Hoạt động khái quát hóa của nhóm này khá tốt. Các em dự đoán trường hợp khái quát dựa vào 2 trường hợp riêng đã trình bày ở phần trên. Dự đoán của nhóm này là: $AH^2 = (1-l)AB^2 + l(1-k)AC^2 + l.k.AD^2$ $-(l-l^2).(1-k)BC^2 - k.(l-l^2).BD^2 - l^2(k-k^2)CD^2$ Các em dự đoán kết quả như thế bởi vì khi các em quan sát 2 trường hợp riêng các em nhận đinh rằng:

 e) CM: $AH^2 = (1-l)AB^2 + lAM^2 - l(1-l)BM^2$ $= (1-l)AB^2 + l[(1-k)AC^2 + kAD^2 - k(1-k)CD^2]$ $- l(1-l)[(1-k)BC^2 + kBD^2 - k(1-k)CD^2]$ $= (1-l)AB^2 + (1-k)lAC^2 + klAD^2$ $- (1-l).l(1-k)BC^2 - (1-l)l.kBD^2 - (1-k)kl^2CD^2$	+ Hệ số AB^2 phụ thuộc vào tỉ số $\frac{HM}{BM}$; hệ số AC^2 phụ thuộc vào tỉ số $\frac{MD}{CD}$ nhân với hệ số của AM^2; hệ số AD^2 phụ thuộc vào tỉ số $\frac{CM}{CD}$ nhân với hệ số của AM^2; mà hệ số của AM^2 phụ thuộc vào tỉ số $\frac{BH}{BM}$. Hệ số của BC^2= hệ số AB^2 $\times$hệ số $AC^2 \times$(-1) Hệ số của BD^2= hệ số AB^2 $\times$hệ số $AD^2 \times$(-1) Hệ số của CD^2= hệ số AD^2 $\times$hệ số $AC^2 \times$(-1)
Nhóm 2:  d, $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BM} = l\overrightarrow{BM}$ Dự đoán: $AH^2 = (1-l)AB^2 + l(1-k)AC^2 + klAD^2 - (1-l)l(1-k)BC^2$ $- (1-l)lkBD^2 - (1-k)kl^2CD^2$ $AH^2 = (1-l)AB^2 + lAM^2 - (1-l)lBM^2$ $= (1-l)AB^2 + l[(1-k)AC^2 + kAD^2 - (1-k)kCD^2]$ $- (1-l)l[(1-k)BC^2 + kBD^2 - (1-k)kCD^2]$ $= (1-l)AB^2 + l(1-k)AC^2 + klAD^2 - (1-k)kl CD^2$ $- (1-l)l(1-k)BC^2 - (1-l)lkBD^2 - (1-k)kl^2CD^2$	Nhóm 2 các em cũng có cùng cách dự đoán như nhóm 1, tuy nhiên các em khó khăn trong việc diễn đạt vấn đề. Vì thế các em chưa trình bày được lý do vì sao các em dự đoán như thế. Phần CM của các em cũng có cùng kết quả với dự đoán.
Nhóm 3  d, $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BM} = l\overrightarrow{BM}$ Dự đoán: $AH^2 = (1-l)AB^2 + l(1-k)AC^2 + klAD^2 - (1-l)l(1-k)BC^2$ $- (1-l)lkBD^2 - (1-k)kl^2CD^2$ $AH^2 = (1-l)AB^2 + lAM^2 - (1-l)lBM^2$ $= (1-l)AB^2 + l[(1-k)AC^2 + kAD^2 - (1-k)kCD^2]$ $- (1-l)l[(1-k)BC^2 + kBD^2 - (1-k)kCD^2]$ $= (1-l)AB^2 + l(1-k)AC^2 + klAD^2 - (1-k)kl CD^2$ $- (1-l)l(1-k)BC^2 - (1-l)lkBD^2 - (1-k)kl^2CD^2$	Nhóm 3 cũng tương tự như nhóm 2, các em đưa ra được dự đoán cho trường hợp tổng quát tuy nhiên các em gặp khó khăn trong quá trình giải thích dự đoán. Phần kiểm chứng dự đoán có cùng kết quả với dự đoán của nhóm này.

2.7.2.3. Buổi khảo sát học sinh thực hiện phiếu học tập số 7

Bài làm của một số nhóm của lớp 11 chuyên Lý, 11 chuyên Văn về xây dựng giả thuyết cho một bài toán và kiểm chứng tính đúng/sai của giả thuyết bằng CM Toán học.

Bàng 2.12. Bài làm của một số nhóm về xây dựng giả thuyết và kiểm chứng giả thuyết

Nhóm 1:  Tứ diện A'ABC, AA' ⊥ (ABC), △ABC là △ vuông cân AB = BC = a Góc giữa mp(A'BC) và mp(ABC) là 60°. Gọi M là TĐ của BC. N đx với M qua O (O là TĐ của AC). Tính d(AB, A'M) Giải: △ABC vcân, AB = AC = a → △ABC vcân tại B MO là đtb △ABC → MO = 1/2 AB = 1/2 a, MO // AB Vẽ hv ABCD trong (ABC) N đx với M qua O → MN // AB, MN = 2MO → MN ⊥ AD, MN = a → N ∈ AD  (A'AD): Kẻ AH ⊥ A'N (1) MN ⊥ AD, MN ⊥ A'A (A'A ⊥ (ABCD)) ⇒ MN ⊥ (A'AD) ⇒ MN ⊥ AH (2) (1), (2) → AH ⊥ (A'MN) → d(A, (A'MN)) = AH M là TĐ của BC → N là TĐ của AD → AN = 1/2 a △A'AH vuông tại A: 1/AH² A'A ⊥ (ABCD) → A'A ⊥ AD, A'A ⊥ AB. △ (A'BC) ∩ (ABC) = BC, A'A ⊥ (ABC), AB ⊥ BC → góc giữa (A'BC) và (ABC) là (A'B, AB) = $\widehat{A'BA}$ ⇒ $\widehat{A'BA}$ = 60° △A'AB: A'A = AB.tan60° = a√3 △A'AH: 1/AH² = 1/3a² + 1/a² = 13/3a² → AH = a√(3/13) → d(A, (A'MN)) = a√(3/13) AB // MN → AB // (A'MN), A'M ⊂ (A'MN) → d(AB, A'M) = d(AB, (A'MN)) = d(A, (A'MN)) = a√(3/13)	Ở nhóm này, chưa chuyển giả thiết $AA' \perp (ABC)$. Khi được hỏi lý do thì các em trả lời vì chưa huy động được kiến thức liên quan để thực hiện công việc chuyển đổi. Các em nhìn một nửa hình vuông là tam giác vuông cân tại B, nhìn góc $A'BA = 60^0$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (*A'BC*) và (*ABC*). Nhìn khoảng cách cách từ điểm *A* đến (*A'MN*) chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AB* và *A'M*. Sau đó các em kiểm chứng giả thuyết được xây dựng bằng cách xác định và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AB* và *A'M*.
Nhóm 2:  Cho h.chóp A'ABC có AA' ⊥ (ABC) đáy (ABC) là tam giác vuông cân tại B có AB = BC = a cho (A'BC), (ABC) = 60°. Tính d(AB, AO) với O là trg.d AC Xây dựng được giả thiết như trên dựa vào các lí thuyết đã học → góc giữa 2mp chuyển về góc giữa đg và mặt và về góc giữa 2 đg thẳng → Khoảng cách giữa 2đg chéo nhau được về khoảng cách giữa đg với mặt và quy về h/c tứ diện đều mới  Tính h/c A'A ⊥ (ABC), (A'B) ∩ (ABC) = BC, AB ⊥ BC → ((A'BC), (ABC)) = $\widehat{ABA'}$ = 60° Kẻ Ox // AB, từ A kẻ AN ⊥ Ox → (AB, AO) = (AB, (A'ON)) Có AB // ON → AB // (A'ON) → d(AB, (A'ON)) = d(A, (A'ON))	Nhóm 2 cũng xây dựng giả thuyết cũng tương tự như nhóm 1. Các em nhìn khoảng cách từ điểm *A* đến (*A'MN*) chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AB* và *A'O*.

2.8. Những khó khăn học sinh thường gặp khi tiến hành hoạt động phán đoán và xây dựng giả thuyết

Chúng tôi tổng kết những khó khăn của các em từ việc quan sát các em làm việc nhóm học tập, kết quả của câu trả lời của mỗi nhóm cho các phiếu học tập và trả lời câu hỏi phỏng vấn trực tiếp của các em trong quá trình khảo sát.

- *Những khó khăn khi các em tiến hành hoạt động PĐ*:

Sau khi các em tham gia thảo luận và hoàn thành các nội dung của các phiếu khảo sát chúng tôi đặt ra câu hỏi cho các em xoay quanh chủ đề PĐ. Câu hỏi mà chúng tôi rất muốn các em trả lời: "Các em gặp những khó khăn nào khi tiến hành các hoạt động PĐ?". Nhiều em trả lời như sau:

+ Khi bắt đầu PĐ một vấn đề nào đó, các em không biết dựa vào cơ sở nào để dự đoán do gặp khó khăn trong việc huy động vốn kiến thức hiện có của mình với kiến thức để PĐ.

+ Các em đã quen với việc học đó là thầy cô đưa sẵn giả thuyết bài toán và yêu cầu CM. Khi làm việc với việc dự đoán công thức hoặc xây dựng giả thuyết cho một bài toán thì các em cảm thấy lúng túng vì không biết sẽ làm như thế nào và bắt đầu từ đâu. Tuy nhiên, sau hoạt động PĐ đầu tiên, hoạt động PĐ kế tiếp các em đã tỏ ra hào hứng và tư duy của các em có sự linh hoạt và độc lập. Tuy việc dự đoán, tìm tòi đúng là tốn thời gian nhưng "sẽ được đền bù nhanh chóng khi tư duy độc lập của HS đã được phát triển". Vì thế, trong quá trình DH GV nên quan tâm rèn luyện cho HS có thói quen quan sát, tìm tòi và dự đoán.

+ Nhiều em trả lời rằng các em rất lúng túng với việc giải thích lý do vì sao dự đoán được như thế do hạn chế về mặt ngôn ngữ trong đó có việc sử dụng các thuật ngữ Toán học để diễn đạt vấn đề.

+ Một vài em không thích tham gia dự đoán bởi lẽ khi các em tham gia hoạt động PĐ sẽ bộc lộ một vài nhược điểm như làm việc thụ động, khó khăn ttrong diễn đạt về ngôn ngữ, lúng túng trong lập luận, khả năng phản biện còn thấp, thiếu kỹ năng tương tác với bạn trong nhóm, ...

- *Những khó khăn khi HS tiến hành hoạt động xây dựng giả thuyết*

+ Các em còn phân vân giữa cách giải bài toán và cách xây dựng bài toán. Tuy nhiên việc xây dựng giả thuyết của bài toán giúp các em nhận biết vấn đề cốt lõi của các bài toán mở rộng.

+ Việc xây dựng giả thuyết của bài toán đòi hỏi nắm vững kiến thức về HH, đòi hỏi nhiều thời gian để suy nghĩ. Đây cũng là vấn đề khó khăn đối với những em chưa chắc kiến thức HH.

+ Một số em chỉ tìm được các giả thuyết đơn giản vì các em chưa có vận dụng linh hoạt các định lý, định nghĩa HH. Việc tìm ra giả thuyết hay đòi hỏi các em có kiến thức hệ thống về HH và sự vận dụng sắc bén các kiến thức đó.

+ Đây là cách làm mới đối với các em nên các em còn lúng túng trong khi thực hiện. GV cần cung cấp thêm nhiều bài toán gốc để giúp các em rèn luyện việc xây dựng giả thuyết từ bài toán này.

Tuy nhiên đối với các em có NL Toán học tốt thì các em hứng thú với những bài toán gốc giấu đi những điểm quan trọng và mấu chốt của bài toán, như thế để các em tự tìm tòi và khám phá.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Qua khảo sát của một số lớp ở trường THPT chuyên Nguyễn Huệ (hai lớp chuyên về các môn tự nhiên và hai lớp chuyên về các môn xã hội) đã giúp chúng tôi xây dựng phần thực tiễn cho mỗi biện pháp đề xuất của đề tài Luận án, thấy được những khó khăn trong việc PĐ và xây dựng giả thuyết từ đó để chúng tôi tìm được các giải pháp khắc phục trong mỗi biện pháp đề xuất.

Việc thiết kế nghiên cứu đã giúp chúng tôi lựa chọn các biện pháp khi áp dụng cho các đối tượng HS đại trà, trong đó có một số HS có NL Toán học khá tốt và có những HS có NL Toán học ở mức trung bình. Các biện pháp mà chúng tôi xây dựng ở chương 3 với mục tiêu bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS theo hướng tăng cường NL sáng tạo, NL khám phá, NL SL, phát huy tính tích cực, tự giác trong học tập và khắc phục các khó khăn khi các em tiến hành dự đoán và xây dựng giả thuyết. Khảo sát vấn đề nghiên cứu ở chương 2 chính là cơ sở thực tiễn để chúng tôi xây dựng các biện pháp trong chương 3.

CHƯƠNG 3
BIỆN PHÁP BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC PHÁN ĐOÁN VÀ LẬP LUẬN CÓ CĂN CỨ CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC

Xuất phát từ những cơ sở lý luận và thực tiễn về NLPĐ và khả năng LLCCC của HS, Luận án xây dựng các biện pháp sư phạm nhằm bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT. Các biện pháp có quan hệ hữu cơ, tác động, bổ sung cho nhau và mang nét đặc trưng trong PPDH bộ môn THPT. Mỗi biện pháp dựa trên cơ sở lý luận và thực tiễn của vấn đề nghiên cứu, có nêu ra mục đích biện pháp, cơ sở và vai trò của biện pháp, hướng dẫn thực hiện biện pháp, một số lưu ý khi thực hiện biện pháp nhằm bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS trong DH HH ở trường THPT. PĐ giúp các HS rèn khả năng quan sát và nhìn nhận vấn đề một cách tốt hơn. Việc đề xuất các bước PĐ dựa trên nghiên cứu cơ sở lý luận và thực tiễn của vấn đề nghiên cứu, từ đó thấy được PĐ và GQVĐ là hai hoạt động có mối liên hệ mật thiết với nhau trong DH môn Toán nói chung và môn HH ở bậc học THPT nói riêng.

Trong mỗi biện pháp bồi dưỡng NLPĐ chúng tôi phân thành thành hai giai đoạn chính: Giai đoạn PĐ giả thuyết và giai đoạn kiểm chứng PĐ:

Giai đoạn PĐ giả thuyết nhằm phát triển NLPĐ, tạo những tiền đề quan trọng cho việc phát triển tư duy sáng tạo;

Giai đoạn kiểm chứng PĐ lại rèn luyện cho HS khả năng LLCCC đó là việc sử dụng các quy tắc SL để CM bài toán dự đoán và việc xác định được căn cứ của mỗi bước lập luận. Giai đoạn kiểm nghiệm bài toán được PĐ nhằm mục đích tìm lý lẽ để minh chứng cho một điều đã được khẳng định hoặc đã được người học dự đoán và tin là đúng. Giai đoạn này nhằm mục đích để khẳng định tính đúng đắn của PĐ mà chính người học chưa chắc chắn tính đúng/sai của nó.

Trong mỗi biện pháp bồi dưỡng NL PĐ cho HS, chúng tôi còn tiến hành thêm khảo sát trên một nhóm HS không sử dụng SL có lý để PĐ nghĩa là các em dự đoán tự do, kết quả cho thấy các em trong nhóm này đều dự đoán sai. Qua đó, chúng tôi thấy được vai trò của việc sử dụng những SL có lý, các hoạt động trí tuệ, tri thức triết học duy vật biện chứng trong việc bồi dưỡng NL PĐ cho HS.

3.1. Biện pháp 1: Tạo tình huống để học sinh phán đoán trong dạy học hình học nhờ sử dụng suy luận quy nạp và tương tự

3.1.1. Mục đích của biện pháp

Thông qua biện pháp 1 nhằm bồi dưỡng cho HS NLPĐ nhờ SL quy nạp và tương tự. Biện pháp 1 giúp các em xây dựng giả thuyết mới nhờ sử dụng SL quy nạp từ các trường hợp riêng lẻ hoặc sử dụng SL tương tự từ bài toán quen thuộc mà các em đã biết. Hơn thế nữa, Biện pháp này còn hướng tới việc xây dựng lời giải của một bài toán mới nhờ việc sử dụng tương tự với các bước CM của một bài toán quen thuộc. Từ đó, các em thấy được rằng mối quan hệ chặt chẽ giữa PĐ với CM bài toán. Biện pháp này cũng bồi dưỡng cho HS LLCCC ở trong mỗi bước CM của các em. Trong mỗi bước lập luận, chúng tôi đều hỏi các em dựa căn cứ nào để trình bày lời giải của mình.

Chúng tôi cũng khảo sát trên một nhóm HS mà PĐ không sử dụng SL quy nạp hoặc tương tự; kết quả cho thấy các em ở nhóm này đã dự đoán sai và các em đã gặp lúng túng khi CM trường hợp tổng quát.

3.1.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp

3.1.2.1. Phán đoán nhờ suy luận quy nạp

Polya đã chỉ bốn bước của SL quy nạp: Quan sát các trường hợp riêng lẻ, dự đoán công thức dựa vào các trường hợp riêng trước đó, khái quát hóa và dự đoán xác nhận với trường hợp riêng mới. Đối với SL quy nạp từ việc khảo sát một số trường hợp riêng lẻ, Reid và Canadas [39], [40] đã mô tả các bước sau đây: Quan sát quy luật; dự đoán quy luật đó áp dụng cho trường hợp tổng quát; kiểm tra dự đoán và khái quát hóa dự đoán. Sau đó Canadas [39, tr. 55-56] và cộng sự của mình đã mô tả SL quy nạp theo bảy bước dưới đây:

Quan sát các trường riêng, sắp xếp các trường hợp riêng một cách có hệ thống, tìm kiếm và dự đoán quy luật, hình thành dự đoán, kiểm chứng dự đoán, khái quát hóa, xác minh dự đoán cho trường hợp tổng quát.

Việc đưa SL quy nạp vào DH môn toán đã không còn xa lạ đối với các em nhưng nhờ SL quy nạp để HS được rèn luyện PĐ là hoạt động mà các em ít được trải nghiệm trước đây. Việc các em PĐ trong các giờ học đã giúp các em có cách

nhìn mới về việc học toán, các em không chỉ học toán như một người giải toán mà còn làm việc như một người nghiên cứu toán.

Mặc dù các em PĐ đúng hay không đúng kết quả của bài toán thì chúng tôi nhận thấy rằng điểm chung trong các nhóm khảo sát là việc đưa vấn đề PĐ đã giúp các em cảm thấy mình tích cực học tập, không muốn dựa dẫm vào cách giải của thầy cô trên lớp nữa. Vấn đề PĐ thôi thúc đẩy các em đi tìm lời giải cho bài toán.

3.1.2.2. Phán đoán nhờ suy luận tương tự

Canadas và cộng sự của mình đã tổng hợp các loại PĐ và quy trình của mỗi loại PĐ. Trong đó PĐ nhờ SL tương tự được tiến hành thông qua các bước sau:

Quan sát hai đối tượng; Tìm kiếm cấu trúc giống nhau giữa các đối tượng; Phát biểu PĐ dựa trên sự giống nhau đó; Kiểm tra PĐ; khái quát hóa PĐ; CM trường hợp tổng quát [39, tr.65].

Qua khảo sát vấn đề nghiên cứu chúng tôi nhận thấy rằng nếu đưa hoạt động PĐ trong DH môn toán nói chung và môn HH nói riêng ở trường THPT sẽ giúp các em có cách nhìn sâu sắc hơn một vấn đề nào đó; các em không chỉ đóng vai trò là người đi CM bài toán mà hơn thế nữa là người đi tìm giả thuyết của bài toán hoặc kết luận của bài toán. Việc PĐ nhờ SL tương tự giúp các có khả năng quan sát và nhìn nhận vấn đề một cách tốt hơn. Cùng với việc dự đoán các em đã được rèn luyện tư duy biện chứng ẩn tàng dưới nhiều hình thức khác nhau. Khi được hỏi, hoạt động PĐ nên đưa vào tình huống nào thì phù hợp, thì các em cho rằng nên đưa hoạt động PĐ vào việc giải quyết các bài toán phức tạp, khó giải quyết. Các khâu dự đoán chính là các nấc thang để các em đến đích của bài toán. Nhiều em cho rằng, luyện tập cho các em PĐ cũng chính là cho các em tiếp cận với nghiên cứu khoa học. Mặc khác đa số các em đồng ý với ý kiến: PĐ không những giúp các em hiểu được bài toán được giải quyết như thế nào mà còn hiểu được bài toán đó được tìm ra ra sao.

3.1.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp

3.1.3.1. Hướng dẫn học sinh phán đoán nhờ suy luận quy nạp

Trên cơ sở nghiên cứu cơ sở lý luận và thực tiễn, chúng tôi đề xuất các bước hướng dẫn học sinh PĐ nhờ sử dụng SL quy nap như sau:

Bước 1: *GV tổ chức cho HS quan sát và PĐ các trường hợp riêng*

GV cho HS được quan sát một vài trường hợp riêng rồi yêu cầu các em sẽ dự đoán kết quả của một số trường hợp riêng khác, các em PĐ dựa vào mối liên hệ nào đó; có thể dựa vào các con số, hình vẽ,....

Bước 2: *HS kiểm chứng kết quả vừa PĐ ở một số trường hợp riêng*

HS kiểm chứng kết quả PĐ bằng nhiều cách khác nhau, chẳng hạn vẽ thêm đường phụ,... để chuyển về bài toán quen thuộc đã biết, sau đó sử dụng SL CM để tìm kết quả đúng cho các trường hợp riêng khác.

Bước 3: *GV tổ chức cho HS sắp xếp các trường hợp riêng một cách có hệ thống*

GV có thể sử dụng bảng biểu để người học sắp xếp các trường hợp riêng có liên quan với nhau và hệ thống hóa chúng.

Bước 4: *HS tìm kiếm và phát hiện quy luật chung từ các trường hợp riêng*

Khi các em quan sát mà thấy quy luật được lặp đi lặp lại và thường xuyên thì quy luật đó có thể áp dụng cho các trường hợp khác. GV lưu ý với HS rằng PĐ này có thể áp dụng cho mọi trường hợp.

Bước 5: *Người học khái quát hóa PĐ*

HS xuất phát từ các PĐ (có thể xảy ra) để đi đến quy tắc chung được chấp nhận. Nếu các em tin rằng giả thuyết đó là đúng, thì HS có thể khái quát hóa giả thuyết đó để đi đến chân lý.

Bước 6: *GV hướng dẫn HS CM trong trường hợp tổng quát*

GV hướng dẫn HS sử dụng LLCCC để CM trường hợp tổng quát, đây là cách biện minh đảm bảo tính đúng đắn của PĐ. Mỗi bước lập luận GV lưu ý cho HS tìm căn cứ để CM; đó là các định nghĩa, định lý hay tính chất Toán học đã biết.

Sau khi CM, GV phân tích QTSL được dùng để CM trường hợp tổng quát. QTSL thường gặp là: $\models p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n \Rightarrow q$ để kiểm chứng giả thuyết tổng quát.

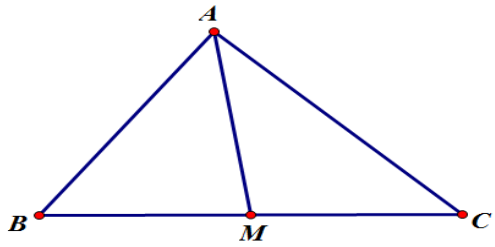
Ví dụ 3.1: "Cho tam giác *ABC*, *M* thuộc cạnh *BC* sao cho $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BC}$ (0<k<1)**.** Hãy dự đoán công thức tính *AM* theo ba cạnh của tam giác *ABC*".

Rõ ràng tình huống này đưa ra không phải HS nào cũng hào hứng để các em dự đoán công thức, lý do các em thấy mình chưa có cơ sở gì để dự đoán. Chúng tôi đề xuất các bước PĐ để giúp các em có có những điểm mấu chốt nhằm dự đoán tốt

hơn đồng thời qua đó thúc đẩy các em tìm lời giải cho bài toán này nhằm kiểm chứng PĐ của các em.

Bước 1: ***GV tổ chức cho HS quan sát và PĐ các trường hợp riêng***

+ Xuất phát từ công thức quen thuộc trong SGK HH 10: "*M* là trung điểm của cạnh *BC* thì công thức tính trung tuyến *AM* là $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2 (*)$". (hình 3.1)

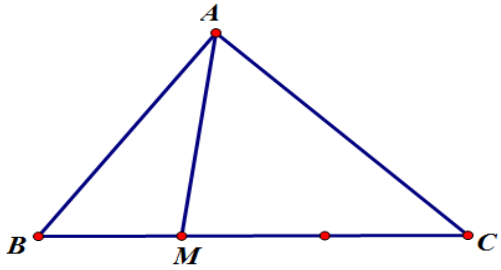


Hình 3.1

+ Khảo sát một số trường hợp riêng khác bằng cách thay đổi giả thuyết:

Đặt vấn đề:

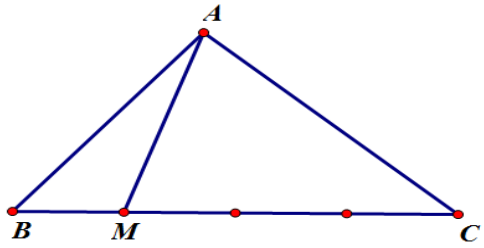
Trường hợp 1: *M* thuộc cạnh *BC* sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (hình 3.2);



Hình 3.2

Trường hợp 2: "*M* thuộc cạnh *BC* sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (hình 3.3).

Em hãy PĐ công thức tính *AM* theo ba cạnh của tam giác và sử dụng SL Toán học để CM công thức vừa PĐ.



Hình 3.3

Khi chưa kiểm chứng công thức, có những xu hướng PĐ của HS đã xảy ra trong các buổi khảo sát như sau:

Xu hướng 1:

PĐ $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2$ được SL tương tự từ công thức $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$. PĐ này được nhiều em HS ở các lớp khảo sát lựa chọn.

Xu hướng 2: Các em phân vân giữa hai lựa chọn trong PĐ của mình:

PĐ $AM^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$ hoặc $AM^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$ được SL từ việc các em quan sát công thức $AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$ ta có

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1; \frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ nên với trường hợp này $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1;\ \frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$. Những em suy nghĩ theo xu hướng này gặp một vấn đề là các em chưa xác định được hệ số 2/3 ở vị trí AB^2 hay AC^2.

Xu hướng 3:

PĐ $AM^2=\frac{2}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2-\frac{2}{9}BC^2$. Sở dĩ các em PĐ được điều này là các em cho rằng mình dựa vào công thức $AM^2=\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}}AB^2+\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}AC^2-\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}BC^2$ được suy ra từ công thức (*).

GV đặt ra câu hỏi: "Chúng ta khảo sát bao nhiêu trường hợp riêng để các em có thể dự đoán được quy luật của bài toán quy nạp?". Theo khảo sát thực tế thì các em trả lời chỉ cần khảo sát từ hai đến ba trường hợp riêng là có thể dự đoán được quy luật cho trường hợp tổng quát.

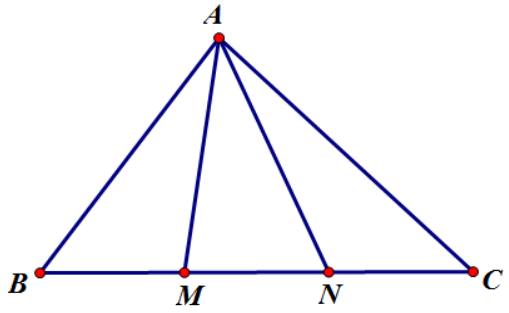
Bước 2: HS kiểm chứng PĐ các trường hợp riêng đúng hay sai

Bài toán 1: (Hình 3.4) Gọi *N* là trung điểm của *MC*. Áp dụng công thức (*) hai lần cho hai tam giác:

+ Tam giác *ABN*:

$$AM^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AN^2-\frac{1}{4}BN^2$$

$$=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AN^2-\frac{1}{9}BC^2 \quad (1)$$



Hình 3.4

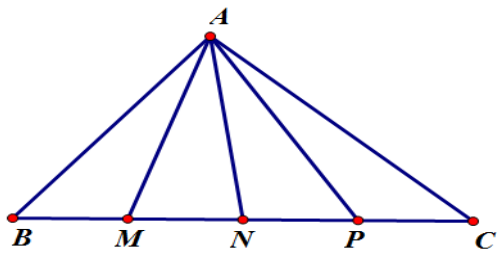
+ Tam giác *AMC*:

$$AN^2=\frac{1}{2}AM^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}MC^2=\frac{1}{2}AM^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{9}BC^2 \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có: $AM^2=\frac{2}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2-\frac{2}{9}BC^2$

Bài toán 2: (Hình 3.5). Tương tư với cách làm ở trên, Gọi *N*, *P* chia đoạn *BC* như hình vẽ bên cạnh. Áp dụng công thức (*) ba lần cho ba tam giác: *ABN*, *AMP* và *ANC* ta có:

$$AM^2=\frac{3}{4}AB^2+\frac{1}{4}AC^2-\frac{3}{16}BC^2$$



Hình 3.5

Bước 3: ***GV cho HS sắp xếp các trường hợp riêng một cách có hệ thống***

Các trường hợp riêng	Công thức tính *AM* theo ba cạnh của tam giác *ABC*	Nhận xét
M là trung điểm của *BC*	$AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;\ \frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
M thuộc BC sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$	$AM^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1;\ \frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$
M thuộc *BC* sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$	$AM^2 = \frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 - \frac{3}{16}BC^2$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1;\ \frac{3}{4}.\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

Bước 4: ***Tìm kiếm và PĐ quy luật chung***

+ Khi nghiên cứu những số liệu trên, các em thấy được rằng khi xét các trường hợp riêng đều tuân theo quy luật: "tổng hệ số của của AB^2 và AC^2 bằng 1 và tích các hệ số của AB^2 và AC^2 bằng hệ số của BC^2.

+ Chúng tôi cũng tiến hành khảo sát trên một nhóm mà các em PĐ không dựa vào SL quy nạp: Các em ở nhóm này có kết quả dự đoán như sau:

$$AM^2 = \frac{1}{k}AB^2 + \frac{1}{k}AC^2 - \frac{1}{k^2}BC^2 (3)$$

Các em cho rằng theo công thức (*) các hệ số của AB^2 và AC^2 đều bằng 1/2, còn hệ số của BC^2 bằng bình phương của hệ số AB^2 nên các em có kết quả dự đoán công thức (3) . Rõ ràng đây là dự đoán sai.

Bước 5: ***Khái quát hóa PĐ***

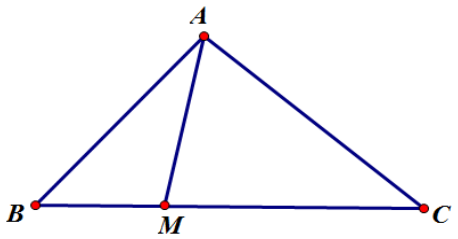
Cho tam giác *ABC*, nếu *M* chia đoạn *BC* theo tỉ số $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BC}$ (0<*k* <1) thì $AM^2 = (1-k).AB^2 + k.AC^2 - (k-k^2)BC^2$.

Bước 6: ***CM trong trường hợp tổng quát*:**

Cho tam giác *ABC*, nếu *M* thuộc cạnh *BC* sao cho $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BC}$ (0<k<1). Tính *AM* theo ba cạnh của tam giác *ABC*. (hình 3.6)

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + k.\ \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\ = (1-k)\overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{AC}$



Hình 3.6

$\overrightarrow{AM}^2 = AM^2 = (1-k)^2AB^2 + k^2AC^2 + 2(1-k)k.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (3), trong đó:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$ thay vào (3) ta có: $AM^2 = (1-k)AB^2 + k.AC^2 - (k-k^2).BC^2$

3.1.3.2. Hướng dẫn học sinh phán đoán nhờ tương tự

Trên cơ sở nghiên cứu cơ sở lý luận và thực tiễn, chúng tôi đề xuất các bước hướng dẫn học sinh PĐ nhờ sử dụng SL tương tự như sau:

Bước 1: GV cho HS quan sát hai đối tượng cần so sánh;

Bước 2: HS tìm kiếm sự giống nhau giữa hai đối tượng đó;

Bước 3: GV gợi ý cho người học tìm kiếm một vài thuộc tính khác ở đối tượng thứ nhất;

Bước 4: GV tổ chức để HS PĐ thuộc tính tương tự của đối tượng còn lại;

Bước 5: HS kiểm tra tính đúng/sai của PĐ dựa vào SL Toán học.

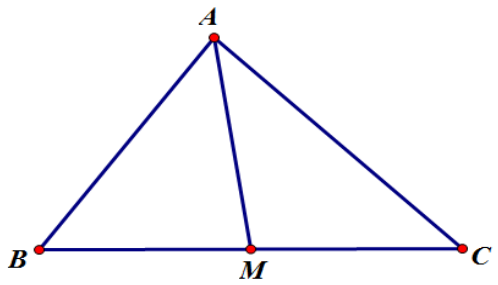
Bước 6: HS khẳng định PĐ của mình là đúng hoặc sai

Chúng tôi cũng khảo sát nội dung đó trên một nhóm mà PĐ không dựa vào SL tương tự, các em ở nhóm này đều cho kết quả dự đoán sai vì PĐ không dựa trên căn cứ nào và các em gặp lúng túng trong quá trình đi tìm lời giải cho bài toán vừa dự đoán.

Ví dụ 3.2: Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *H* là trọng tâm của tam giác *BCD*. PĐ công thức tính *AH*?. Và sử dụng SL Toán học để kiểm chứng công thức vừa PĐ. Rõ ràng với yêu cầu này, HS vẫn chưa có cơ sở nào để dự đoán. Việc chúng tôi xây dựng các bước ở trên nhằm giúp các em dự đoán và kiểm chứng dự đoán có căn cứ đó là dựa vào SL tương tự.

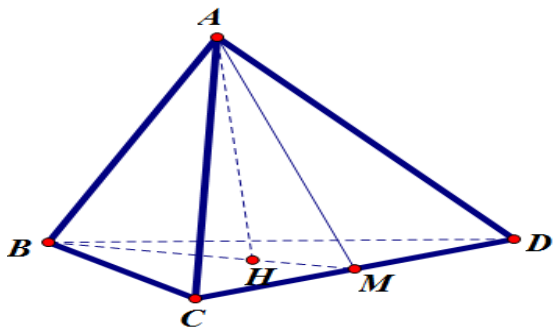
Bước 1: ***GV cho HS quan sát hai đối tượng sau đây:***

Đối tượng 1: Cho tam giác *ABC*, gọi *M* là trung điểm của *BC*.



Hình 3.7

Đối tượng 2: Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *H* là trọng tâm của tam giác *BCD*.



Hình 3.8

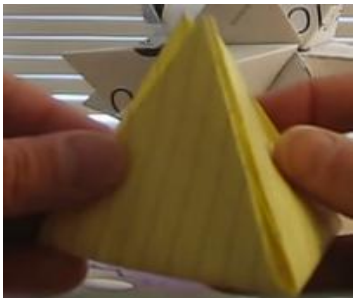
Bước 2: ***HS thảo luận theo nhóm để tìm kiếm sự giống nhau giữa hai đối tượng***

Trong quá trình khảo sát chúng tôi nhận thấy rất nhiều em đã tìm được những điểm tương tự giữa hai bài toán trên với những lập luận riêng của các em như sau:

+ *Khái niệm tam giác trong mặt phẳng tương tự với khái niệm tứ diện trong không gian* (mỗi mặt của tứ diện là một tam giác). Trong quá trình khảo sát chúng tôi nhận được phân tích sự tương tự giữa tam giác và tứ diện từ phía các em như sau:

- Gấp một tam giác đều có thể tạo thành một tứ diện (hình 3.14 và 3.15):

Hình 3.9



Hình 3.10

- Các em tự đặt câu hỏi cho nhóm của mình:

"Có thể gấp một tam giác cân cho trước thành một tứ diện được không?"; "Với tam giác vuông cân thì thế nào?". "Liệu tam giác thường có gấp được thành tứ diện không?"

- Từ đó các em nhận định rằng như thế khái niệm tam giác trong HH phẳng tương tự với khái niệm tứ diện trong không gian.

+ Đa số HS nhận thấy rằng: *M* là trung điểm của BC thì $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ và *H* là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Vì thế *khái niệm trung điểm của đoạn thẳng tương tự với khái niệm trọng tâm của tam giác ABC.*

+ Như thế, hai bài toán này có nhiều thuộc tính tương tự nhau và các em khẳng định rằng có thể PĐ một số kết quả tương tự khác.

Bước 3: ***GV gợi ý để người học tìm kiếm một số thuộc tính khác (đã biết) của đối tượng thứ nhất***

GV gợi ý để HS tìm thuộc tính khác của đối tượng thứ nhất. Đa số các em trả lời đã quen thuộc với công thức sau đây:

"Cho tam giác *ABC*, gọi *M* là trung điểm của *BC*. Ta có $AM^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2(*)$"

Bước 4: HS PĐ đối tương thứ hai cũng có tính chất đó

Việc đặt vấn đề cho bài toán thứ hai là *AH* được tính theo bao nhiêu cạnh của tứ diện, và *AH* được tính như thế nào. *Các em hãy dự đoán công thức tính AH và kiểm chứng dự đoán đó bằng SL Toán học*. Qua khảo sát vấn đề nghiên cứu đã có những dự đoán theo các xu hướng sau đây:

+ **Xu hướng 1**: Các em dự đoán AH^2 tính theo ba cạnh bên của tứ diện: *AB, AC, AD*.

+ **Xu hướng 2**: Các em dự đoán AH^2 tính theo sáu cạnh của tứ diện (các cạnh bên và các cạnh đáy): *AB, AC, AD, BC, BD, CD.*

Khi được hỏi các hệ số của *AB, AC, AD, BC, BD, CD* được dự đoán như thế nào. Các em phân tích như sau:

+ Với bài toán thứ nhất, ta có: các hệ số của AB^2 và AC^2 lần lượt là $\frac{1}{2};\frac{1}{2}$ trong đó $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ và hệ số của BC^2 là $-\frac{1}{4}$ chính là tích của hai hệ số của AB^2 và AC^2.

+ Dựa vào lập luận trên thì các em phân tích cho các hệ số của bài toán thứ hai là:

Vì $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ nên hệ số của AB^2, AC^2, AD^2 là $\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}$

+ Tiếp theo HS nhận xét:

BC là cạnh thứ ba của tam giác *ABC*, nên có thể hệ số của BC^2 là $(-1).\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ chính là tích của (-1) với các hệ số của AB^2 và AC^2

BD là cạnh thứ ba của tam giác *ABD* nên hệ số của BD^2 là $(-1).\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ chính là tích của (-1) với các hệ số của AB^2 và AD^2

CD là cạnh thứ ba của tam giác *ACD* nên hệ số của CD^2 là $(-1).\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ chính là tích của (-1) với các hệ số của AC^2 và AD^2

+ Từ những SL trên, HS PĐ công thức tính *AH* như sau:

$$AH^2=\frac{1}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2+\frac{1}{3}AD^2-\frac{1}{9}BC^2-\frac{1}{9}BD^2-\frac{1}{9}CD^2$$

Bước 5: ***HS kiểm chứng công thức đã PĐ***

Đa số các em áp dụng công thức: Cho tam giác ABC, $\overrightarrow{BM}=k.\overrightarrow{BC}$ (0<k<1).

Ta có: $AM^2=(1-k).AB^2+k.AC^2-(k-k^2).BC^2$ (1)

Với bài toán này, ta có: $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{BH}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{BM}$.

Áp dụng công thức (1) cho các tam giác: *ABM, ACD, BCD* ta có:

ta có: $AH^2=\frac{1}{3}AB^2+\frac{1}{3}AC^2+\frac{1}{3}AD^2-\frac{1}{9}BC^2-\frac{1}{9}BD^2-\frac{1}{9}CD^2$

Bước 6: **HS khẳng định PĐ của mình đúng hoặc sai**

Qua khảo sát chúng tôi thấy có một số nhóm đã khẳng định được cho mình PĐ đưa ra trước khi CM là đúng, đó là:

$$AH^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 + \frac{1}{3}AD^2 - \frac{1}{9}BC^2 - \frac{1}{9}BD^2 - \frac{1}{9}CD^2$$

Mặt khác, chúng tôi tiến hành trên một nhóm HS không sử dụng SL tương tự để dự đoán và kết quả thu được như sau:

Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *H* là trọng tâm của tam giác *BCD*. PĐ công thức tính *AH*? Một số em không dự đoán được và một số em dự đoán như sau:

$$AH^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}BC^2 - \frac{1}{4}CD^2 - \frac{1}{4}BD^2$$

+ Các em cho rằng nếu tam giác *ABC* có *AM* là đường trung tuyến thì ta có:

$$AM^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2 (*)$$

+ Vậy, tứ diện *ABCD* có các cạnh bên là *AB*, *AC* và *AD* và các canh đáy là *BC*, *BD* và *CD* thì công thức tính *AH* là:

$$AH^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{4}BC^2 - \frac{1}{4}CD^2 - \frac{1}{4}BD^2$$

Ví dụ 3.3

Ví dụ 3.4 mô tả việc HS xây dựng giả thuyết của bài toán HH không gian theo con đường tương tự và tìm tòi lời giải của bài toán mới theo con đường liên tưởng dựa vào bài toán tương tự ở trong HH phẳng.

Bài toán trong HH phẳng: "Đường tròn tâm *O* ngoại tiếp tam giác *ABC*, đường thẳng vuông góc với *AO* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *M* và *N*. CM bốn điểm *M*, *N*, *B*, *C* cùng thuộc một đường tròn.

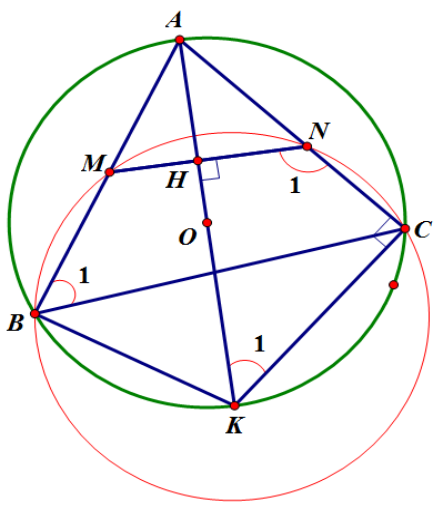
CM: Xét tứ giác *HKCN* ta có:

$H = 90^0$ và $C = 90^0$ nên $H + C = 180^0$.

$\Leftrightarrow N_1 + K_1 = 180^0 \Leftrightarrow N_1 + B_1 = 180^0$

($B_1 = K_1$ do cùng chắn cung AC).

Vậy, các điểm *M*, *N*, *B*, *C* cùng nằm trên đường tròn.



Hình 3.11

Từ việc cho HS quan sát các cặp đối tượng: Đường tròn – mặt cầu; đường thẳng – mặt phẳng; tam giác – tứ diện để phát hiện một số đặc điểm tương tự giữa chúng:

- Khái niệm đường tròn trong mặt phẳng tương tự với khái niệm mặt cầu trong không gian

- Khái niệm tam giác trong mặt phẳng tương tự với khái niệm tứ diện trong không gian
- Khái niệm đường thẳng trong mặt phẳng tương tự với khái niệm mặt phẳng trong không gian.

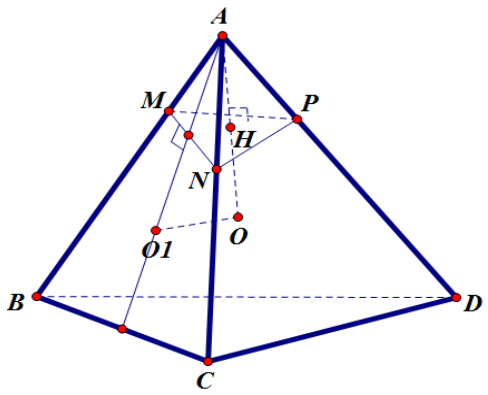
Cụ thể, các đối tượng tương tự với nhau như sau:

Đường tròn tâm *O*	Mặt cầu tâm *O*
Tam giác *ABC*	Tứ diện *ABCD*
Đường thẳng vuông góc với *AO* cắt các cạnh *AB*, *AC* lần lượt tại *M*, *N*	Mặt phẳng vuông góc với *AO* cắt các cạnh *AB*, *AC*, *AD* lần lượt tại *M*, *N*,*P*.
M, *N*, *B*, *C* cùng thuộc một đường tròn	**Dự đoán**: *M*, *N*, *P*, *B*, *C*, *D* cùng thuộc một mặt cầu

Như vậy, chúng ta có thể PĐ giả thuyết bài toán mới là:

Dự đoán bài toán trong HH không gian:

Mặt cầu tâm *O* ngoại tiếp tứ diện *ABCD*. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng *AO* cắt các cạnh *AB*, *AC*, *AD* lần lượt tại *M*, *N*, *P*. CM ***sáu điểm B,C, D, M, N, P cùng thuộc một mặt cầu***.



Hình 3.12

Để tìm lời giải bài toán mới, GV giúp HS liên tưởng đến bài toán (định lý) quen thuộc đã học ở trong HH phẳng và dựa vào tính chất: "Trên mỗi mặt phẳng trong không gian, các kết quả đã biết trong HH phẳng đều đúng".

Định lý: "Nếu đường tròn tâm *O* ngoại tiếp tam giác *ABC*, đường thẳng vuông góc với *AO* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *M* và *N* thì bốn điểm *M*, *N*, *B*, *C* cùng thuộc một đường tròn" (*định lý được sử dụng để xây dựng giả thuyết*) được dùng làm căn cứ để CM bài toán trong HH không gian. Cụ thể là:

Xét tam giác *ABC* của tứ diện *ABCD*, có $M \in AB, N \in AC$. Để áp dụng kết quả của bài toán trong HH phẳng thì các em bổ sung giả thiết còn thiếu, đó là: O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $AO_1 \perp MN$.

Vì O là tâm là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên $OA=OB=OC$ vì thế nếu O_1 là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC) thì $O_1A = O_1B = O_1C$ và $AO_1 \perp MN$ (*định lý ba đường vuông góc*). Vậy, nếu ta bổ sung giả thiết "O_1 là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC)" thì O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $AO_1 \perp MN$.

Áp dụng kết quả của bài toán trong HH phẳng ta có: M, N, B, C cùng nằm trên đường tròn (C_1).

Tương tự với cách làm trên, HS cũng CM được: N, P, C, D cùng nằm trên đường tròn (C_2).

Hai đường tròn (C_1) và (C_2) thuộc hai mặt phẳng cắt nhau và chúng cắt nhau tại hai điểm N, C. Do hai đường tròn (C_1) và (C_2) thuộc một mặt cầu nên sáu điểm B,C, D, M, N, P cùng thuộc một mặt cầu.

Khi HS đi tìm lời giải cho bài toán mới, các em sử dụng các hoạt động trí tuệ để tìm ra mối quan hệ gần gũi giữa cái đã biết với cái chưa biết, các hoạt động này phối hợp nhuần nhuyễn với nhau trong việc tìm đoán các ý CM.

3.1.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp

Hạn chế của việc đưa PĐ vào bài dạy là mất nhiều thời gian so với giờ dạy thông thường, khi bắt đầu PĐ các em cảm thấy chưa xác định phương hướng để dự đoán nên đây cũng chính là khó khăn mà các em gặp phải trong quá trình PĐ. Vì thế GV cần lựa chọn vấn đề để HS PĐ đảm bảo phù hợp với NL Toán học của HS lớp mình và đảm bảo về mặt thời gian khi tổ chức thực hiện.

Để thực hiện biện pháp này hiệu quả, GV nên lựa chọn các bài toán HH phẳng đảm bảo được hai vai trò: vừa là bài toán để HS PĐ giả thuyết mới (Bài toán HH không gian) vừa là căn cứ để người học tìm được lời giải của bài toán được PĐ.

3.2. Biện pháp 2: Tạo các tình huống để học sinh phán đoán trong dạy học hình học nhờ sử dụng khái quát hóa

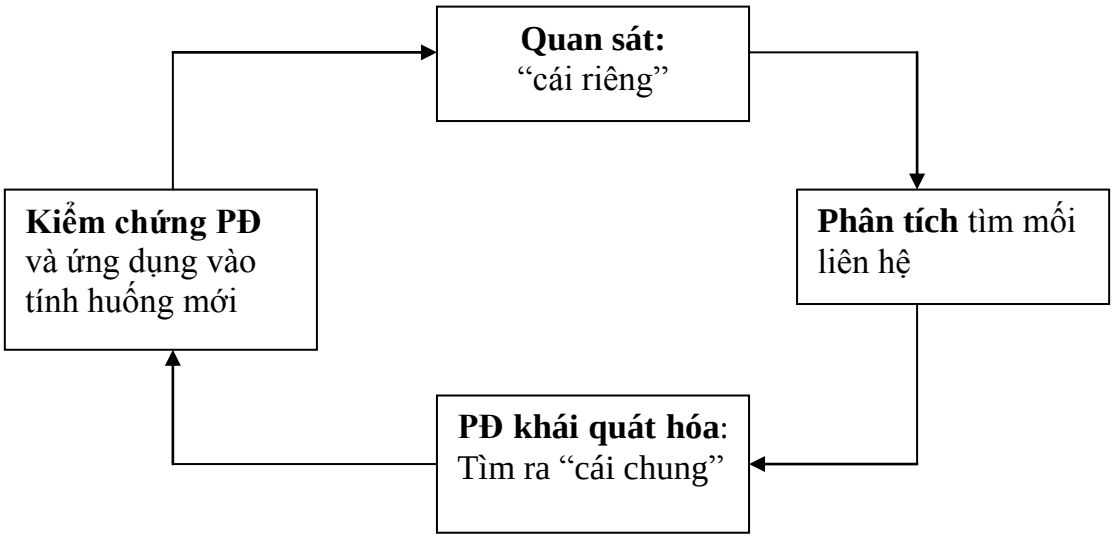
3.2.1. Mục đích của biện pháp

Biện pháp 2 giúp các em bồi dưỡng NLPĐ nhờ khái quát hóa từ một số cái riêng. Biện pháp này giúp HS rèn luyện khả năng khái quát hóa từ một đến hai trường hợp riêng. Nhưng việc khái quát hóa đó chỉ là PĐ của các em, muốn khẳng định khái quát đó là đúng thì các em phải sử dụng LLCCC, đó là các quy tắc SL.

Biện pháp này cũng bồi dưỡng cho HS LLCCC ở trong mỗi bước CM của các em. Trong mỗi bước lập luận, chúng tôi đều hỏi các em dựa căn cứ nào để trình bày lời giải của mình.

3.2.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp

Từ những luận điểm của tâm lý học và triết học, tác giả Nguyễn Phú Lộc đề xuất quy trình khái quát hóa như sau:



Sơ đồ 3.1. Sơ đồ quy trình khái quát hóa [21; tr.56]

Sử dụng khái quát hóa để bồi dưỡng NLPĐ giúp các em rèn luyện khả năng quan sát tốt hơn, việc tri giác bài toán của các em trở nên có mục đích. Cùng với việc dự đoán các em được rèn luyện tư duy biện chứng ẩn tàng; đó là khả năng vận dụng quan hệ giữa cái chung và cái riêng trong việc PĐ kết luận của bài toán từ một vài các riêng được phân tích.

3.2.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp

Trên cơ sở nghiên cứu cơ sở lý luận và thực tiễn, chúng tôi đề xuất các bước hướng dẫn thực hiện biện pháp như sau:

Bước 1: (*Quan sát*): GV tổ chức cho HS quan sát một số trường hợp riêng (cái riêng).

Bước 2: (*phân tích*): HS thảo luận để phân tích hay so sánh các trường hợp riêng từ đó tìm được mối liên hệ, tìm những đặc điểm của các cái riêng trong mối liên hệ đó.

Bước 3: (*PĐ trường hợp khái quát hóa*): HS PĐ trường hợp khái quát hóa (cái chung).

Bước 4 (*Kiểm chứng*): GV hướng dẫn HS kiểm chứng PĐ bằng SL Toán học

Bước 5: Người học khẳng định PĐ đó là đúng hoặc sai

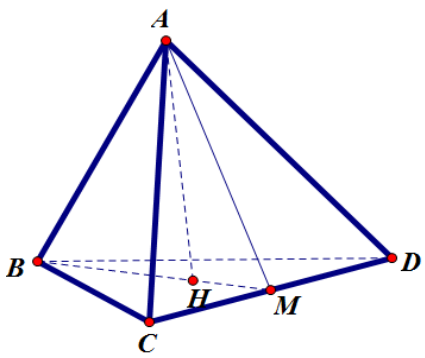
Ví dụ 3.4. Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *M* là điểm nằm trên cạnh *CD* sao cho $\overrightarrow{CM} = k.\overrightarrow{CD}$ (0<k<1) , *H* là điểm nằm trên cạnh *BM* sao cho $\overrightarrow{BH} = l.\overrightarrow{BM}$ (0<l<1). Hãy dự đoán công thức tính *AH* và khẳng định dự đoán của mình bằng CM nhờ SL Toán học.

Bước 1: GV cho HS quan sát hai bài toán sau cũng là hai trường hợp riêng của một bài toán khái quát. (đây là các kết qủa mà HS đã làm trước đây).

Cái riêng thứ nhất: Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *H* là trọng tâm của tam giác *BCD* tức là:

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$. Ta có:

$$AH^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 + \frac{1}{3}AD^2 - \frac{1}{9}BC^2 - \frac{1}{9}BD^2 - \frac{1}{9}CD^2$$



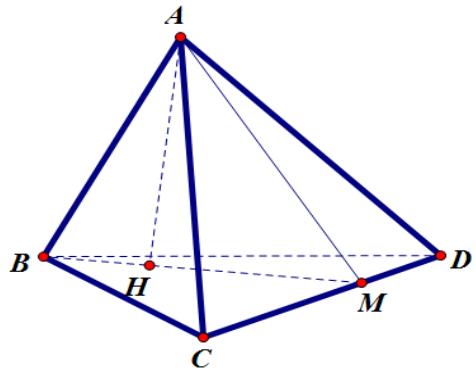
Hình 3.13

Cái riêng thứ hai

Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *M* là điểm nằm trên *CD* và *H* nằm trên *BM* sao cho:

$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$. Ta có:

$$AH^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{9}AC^2 + \frac{2}{9}AD^2 - \frac{2}{27}BC^2 - \frac{4}{27}BD^2 - \frac{2}{81}CD^2$$



Hình 3.14

Bước 2: HS thảo luận để phân tích các trường hợp riêng

Phân tích trường hợp riêng thứ nhất:

Chú ý đến $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$ với các tỉ số: $\frac{1}{2};\frac{2}{3}$

Kết quả ở công thức: $AH^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 + \frac{1}{3}AD^2 - \frac{1}{9}BC^2 - \frac{1}{9}BD^2 - \frac{1}{9}CD^2$

Qua quá trình khảo sát đề tài, chúng tôi thấy các em phân tích để đưa ra PĐ diễn ra giữa các nhóm chủ yếu theo hai xu hướng sau đây:

Xu hướng 1: Nhiều HS trong nhóm này cho rằng: $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}$ và $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$ vì thế các em PĐ trong là các hệ số của AB^2, AC^2, AD^2 chính là tích của các tỉ số $\frac{1}{2};\frac{2}{3}$ còn hệ số của BC^2, BD^2, CD^2 chính là bình phương của 1/3.

Xu hướng 2: Một số HS cho rằng: $\frac{1}{3}=1-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}=(1-\frac{1}{2})\frac{2}{3}$ và $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}$; $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$ nhưng các em lại lúng túng không biết đặt $1-\frac{2}{3}$; $(1-\frac{1}{2})\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}$ ở vị trí nào trong các hệ số của AB^2, AC^2, AD^2

Như thế với trường hợp riêng thứ nhất, các nhóm vẫn chưa xác định một cách rõ ràng quy luật chung giữa các trường hợp để đưa ra dự đoán cho trường hợp tổng quát.

Phân tích trường hợp riêng thứ hai:

Khi cho HS phân tích trường hợp riêng thứ hai thì nhóm theo xu hướng thứ nhất bắt đầu lúng túng. Còn nhóm theo xu hướng 2 thì các em SL như sau:

Hệ số ở AB^2: $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}$; hệ số ở AC^2: $\frac{1}{9}=(1-\frac{1}{3}).\frac{1}{3}$; hệ số ở AD^2: $\frac{2}{9}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}$

Hệ số ở BC^2: $\frac{2}{27}=\frac{2}{3}.\frac{1}{9}$ chính là tích các hệ số của AB^2 và AC^2.

Hệ số ở BD^2: $\frac{4}{27}=\frac{2}{3}.\frac{2}{9}$ chính là tích các hệ số của AB^2 và AD^2

Hệ số ở CD^2: $\frac{2}{81}=\frac{1}{9}.\frac{2}{9}$ chính là tích các hệ số của AC^2 và AD^2

Bước 3: HS PĐ trường hợp khái quát:

GV đưa ra nhiệm vụ: Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *M* là điểm nằm trên cạnh CD sao cho $\overrightarrow{CM}=k.\overrightarrow{CD}$ (0<k<1) , H là điểm nằm trên cạnh BM sao cho $\overrightarrow{BH}=l.\overrightarrow{BM}$ (0<l<1). Hãy dự đoán công thức tính *AH*.

Sau khi các em khảo sát các trường hợp riêng, các nhóm nhận thấy rằng:

+ Hệ số AB^2 phụ thuộc vào tỉ số $\frac{HM}{BM}$; hệ số AC^2 phụ thuộc vào tỉ số $\frac{MD}{CD}$ nhân với hệ số của AM^2; hệ số AD^2 phụ thuộc vào tỉ số $\frac{CM}{CD}$ nhân với hệ số của AM^2; mà hệ số của AM^2 phụ thuộc vào tỉ số $\frac{BH}{BM}$.

Hệ số của BC^2= hệ số AB^2 $\times$hệ số $AC^2\times$(-1); Hệ số của BD^2= hệ số AB^2 $\times$hệ số $AD^2\times$(-1); Hệ số của CD^2= hệ số AD^2 $\times$hệ số $AC^2\times$(-1)

Từ đó, các nhóm dự đoán công thức cho trường hợp khái quát như sau:

$$AH^2=(1-l)AB^2+l(1-k)AC^2+l.k.AD^2-(l-l^2).(1-k)BC^2-k.(l-l^2).BD^2-l^2(k-k^2)CD^2$$

Bước 4: ***GV hướng dẫn HS kiểm chứng PĐ ở bước 3 đúng hay sai bằng SL Toán học***

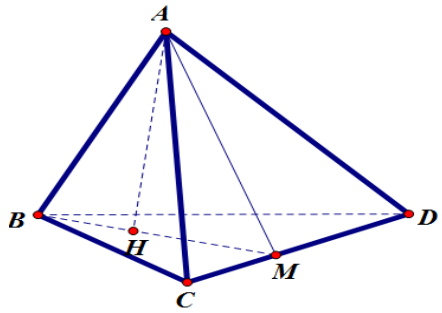
Ta có: $\overrightarrow{CM}=k.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BH}=l.\overrightarrow{BM}$

$AH^2=(1-l)^2AB^2+l^2AM^2+(1-l).l.(AB^2+AM^2-BM^2)$ (1)

$AM^2=(1-k)AC^2+k.AD^2-(k-k^2)CD^2$ (2)

$BM^2=(1-k)BC^2+k.BD^2-(k-k^2)CD^2$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta có:



Hình 3.15

$$AH^2=(1-l)AB^2+l(1-k)AC^2+l.k.AD^2-(l-l^2).(1-k)BC^2-k.(l-l^2).BD^2-l^2(k-k^2)CD^2$$

Bước 5: HS khẳng định PĐ cho trường hợp tổng quát là đúng.

Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *M* là điểm nằm trên cạnh CD sao cho $\overrightarrow{CM}=k.\overrightarrow{CD}$ (0<k<1), H là điểm nằm trên cạnh BM sao cho $\overrightarrow{BH}=l.\overrightarrow{BM}$ (0<l<1).Ta có:

$$AH^2=(1-l)AB^2+l(1-k)AC^2+l.k.AD^2-(l-l^2).(1-k)BC^2-k.(l-l^2).BD^2-l^2(k-k^2)CD^2$$

Chúng tôi cũng thực hiện thực khảo sát trên một nhóm mà các em PĐ không theo các bước của biện pháp 3, cụ thể:

Chỉ cho HS quan sát và phân tích một trường hợp riêng của một bài toán khái quát:

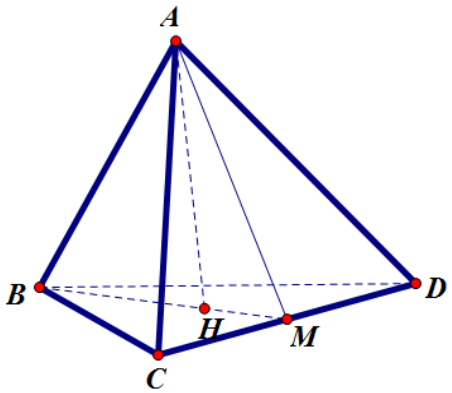
Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *H* là trọng tâm của tam giác *BCD* tức là:

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$. Ta có:

$$AH^2 = \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 + \frac{1}{3}AD^2 - \frac{1}{9}BC^2 - \frac{1}{9}BD^2 - \frac{1}{9}CD^2$$

Các em phân tích như sau:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{9} = \left(\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\right)^2$



Hình 3.16

Vì thế đa số các em trong nhóm này dự đoán cho bài toán khái quát như sau:

Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *M* là điểm nằm trên cạnh CD sao cho $\overrightarrow{CM} = k.\overrightarrow{CD}$ (0<k<1), H là điểm nằm trên cạnh BM sao cho $\overrightarrow{BH} = l.\overrightarrow{BM}$ (0<l<1). Ta có:

$$AH^2 = k.l.AB^2 + k.lAC^2 + k.lAD^2 - (k.l)^2.BC^2 - (k.l)^2 BD^2 - (k.l)^2 CD^2$$

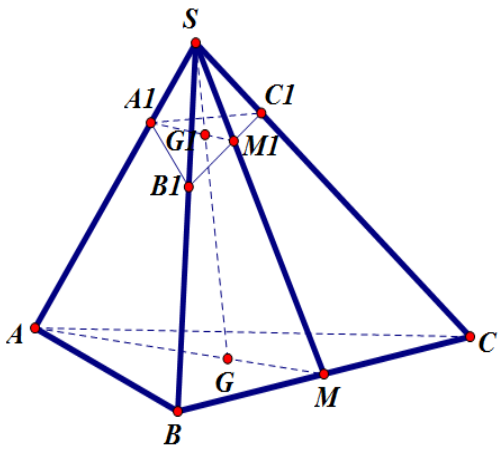
Rõ ràng đây là dự đoán sai vì do các em không sử dụng SL có lý để dự đoán giả thuyết, các em chỉ dựa vào kinh nghiệm và trực giác ban đầu về công thức để dự đoán, dẫn đến dự đoán của các em trong nhóm này là sai.

Ví dụ 3.5.

Bước 1: GV tổ chức cho HS quan sát hai bài toán sau cũng là hai trường hợp riêng của một bài toán khái quát.

Cái riêng thứ nhất

Cho tứ diện *SABC*. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*. (tức là $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$). Một mặt phẳng (α) cắt cạnh *SA*, *SB*, *SC* và cắt đoạn *SG* lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1, G_1. Hệ thức giữa các tỉ số độ dài đoạn thẳng:



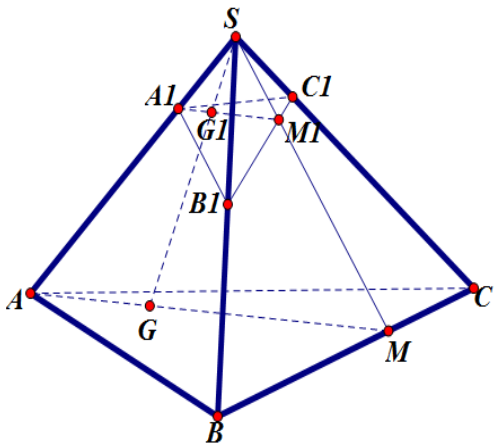
Hình 3.17

$$\frac{SG}{SG_1} = \frac{1}{3}\frac{SA}{SA_1} + \frac{1}{3}\frac{SB}{SB_1} + \frac{1}{3}\frac{SC}{SC_1}$$

Cái riêng thứ hai

Cho tứ diện *SABC*. Gọi *G* nằm trong mặt phẳng *(ABC)* sao cho: $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$. Một mặt phẳng (α) cắt cạnh *SA*, *SB*, *SC* và cắt đoạn *SG* lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1, G_1. Hệ thức giữa các tỉ số độ dài đoạn thẳng:

$$\frac{SG}{SG_1} = \frac{2}{3}\frac{SA}{SA_1} + \frac{1}{9}\frac{SB}{SB_1} + \frac{2}{9}\frac{SC}{SC_1}$$



Hình 3.18

Bước 2: HS phân tích các trường hợp riêng

HS phân tích trường hợp riêng thứ nhất:

Chú ý đến $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ với các tỉ số: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$

Kết quả ở công thức: $\frac{SG}{SG_1} = \frac{1}{3}\frac{SA}{SA_1} + \frac{1}{3}\frac{SB}{SB_1} + \frac{1}{3}\frac{SC}{SC_1}$

Qua quá trình khảo sát đề tài, chúng tôi thấy các em phân tích để đưa ra PĐ diễn ra theo các nhóm sau đây:

Hầu hết các HS đều phân tích để tìm ra PĐ theo cách sau:

Hệ số $\frac{SA}{SA_1}$; $\frac{SB}{SB_1}$; $\frac{SC}{SC_1}$ đều là $\frac{1}{3}$ mà $\frac{1}{3}$ có liên quan đến các tỉ số $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ như sau:

$\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$ hoặc $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}$ hoặc $\frac{1}{3} = (1 - \frac{1}{2}).\frac{2}{3}$

Các em đều lúng túng không biết chúng ở vị trí nào.

HS phân tích trường hợp riêng thứ hai:

Khi cho HS phân tích trường hợp riêng thứ hai thì các em đã thấy được rõ ràng hơn trong các hệ số:

Chú ý đến các biểu thức vectơ $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ với các tỉ số: $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$

Hệ số ở $\frac{SA}{SA_1}$ là $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ hoặc bằng 2/3 của hệ số biểu thức vectơ $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nhưng trường hợp này không xảy ra do ở trường hợp riêng thứ nhất không xảy ra điều này.

Hệ số ở $\frac{SB}{SB_1}$: $\frac{1}{9} = (1 - \frac{1}{3}).\frac{1}{3}$ và hệ số ở AD^2: $\frac{2}{9} = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}$

Bước 3: ***HS PĐ trường hợp khái quát hóa***

Cho tứ diện *SABC*. Gọi *G* nằm trong mặt phẳng (*ABC)* sao cho: $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BC}$ (0<k<1); $\overrightarrow{AG} = l.\overrightarrow{AM}$ (0<l<1). Một mặt phẳng (α) cắt cạnh *SA*, *SB*, *SC* và cắt đoạn *SG* lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1, G_1. PĐ hệ thức giữa các tỉ số độ dài đoạn thẳng:

$$\frac{SG}{SG_1} = (1-l)\frac{SA}{SA_1} + l.(1-k).\frac{SB}{SB_1} + k.l.\frac{SC}{SC_1}$$

Bước 4: ***GV hướng dẫn HS kiểm chứng PĐ bằng SL Toán học***

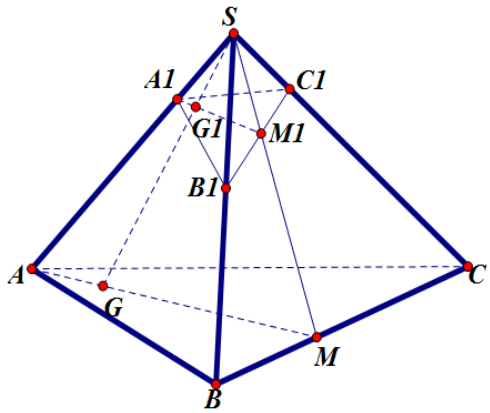
Áp dụng công thức:

$$(1-k)\frac{AB}{AB_1} + k\frac{AC}{AC_1} = \frac{AM}{AM_1}$$

cho các tam giác *SAM* và *SBC*:

$$\frac{SG}{SG_1} = (1-l)\frac{SA}{SA_1} + l.\frac{SM}{SM_1} \quad (1)$$

$$\frac{SM}{SM_1} = (1-k)\frac{SB}{SB_1} + k.\frac{SC}{SC_1} \quad (2)$$



Hình 3.19

Thay (2) vào (1) ta có:

$$\frac{SG}{SG_1} = (1-l)\frac{SA}{SA_1} + l.(1-k).\frac{SB}{SB_1} + k.l.\frac{SC}{SC_1}$$

3.2.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp

GV lưu ý khi tổ chức cho HS quan sát và phân tích các trường hợp riêng, đây là các bước quan trọng để người học có cơ sở PĐ cho trường hợp khái quát. GV nên bám sát quá trình phân tích của HS để định hướng cho các em đi đến kết quả mong đợi.

3.3. Biện pháp 3: Tạo các tình huống để học sinh phán đoán trong dạy học hình học nhờ sử dụng suy luận ngoại suy

3.3.1. Mục đích của biện pháp

Thông qua biện pháp 3 nhằm bồi dưỡng cho HS NLPĐ nhờ SL ngoại suy. Việc đưa SL ngoại suy vào DH môn toán để giúp HS được rèn luyện hoạt động PĐ. Việc các em PĐ trong các giờ học đã giúp các em có cách nhìn mới về việc học toán, các em không chỉ học toán như một người làm toán mà còn làm việc như một người nghiên cứu toán.

Chúng tôi khảo sát trên một nhóm các em PĐ không sử dụng SL ngoại suy, kết quả cho thấy các em ở nhóm này dự đoán sai, vì thế các em gặp lúng túng khi tìm cách GQVĐ đặt ra.

Biện pháp 3 cũng bồi dưỡng cho HS LLCCC ở trong mỗi bước lập luận CM của các em. Trong mỗi bước lập luận chúng tôi đều hỏi các em dựa căn cứ nào trong mỗi bước lập luận CM của các em.

3.3.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp

Canadas và cộng sự của mình đã tổng hợp các loại PĐ và quy trình của mỗi loại PĐ. Trong đó PĐ nhờ ngoại suy được tiến hành thông qua các bước sau:

Quan sát một trường hợp; Quan sát đặc trưng có ý nghĩa của trường hợp được quan sát; Hình thành PĐ mà đặc trưng đó có thể áp dụng cho những trường hợp khác; Kiểm tra PĐ; khái quát hóa PĐ; CM trường hợp tổng quát [39].

Một quy trình cho SL ngoại suy được thể hiện qua những bước sau [14]:

Bước 1: Một sự kiện (hiện tượng, kết quả,..) **S** được quan sát;

Bước 2: Xuất hiện giả thuyết **G** giải thích cho **S;**

Bước 3: Không có giả thuyết nào khác giải thích tốt cho **S** như **G**;

Bước 4: Vậy **G** là lời giải thích tốt nhất cho **S**.

Việc sử dụng ngoại suy để giúp các PĐ kết luận của bài toán đã giúp HS rèn luyện khả năng quan sát tốt hơn, mở rộng cách nhìn về đối tượng quan sát. Từ đó xây dựng nhiều giả thuyết để lý giải cho vấn đề quan sát được. Hơn thế nữa các em phải có khả năng lựa chọn giả thuyết tốt nhất để giải thích tốt nhất cho vấn đề được đặt ra. Sau đó HS sử dụng CM Toán học để kiểm chứng cho giả thuyết được lựa chọn.

3.3.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp

Trên cơ sở nghiên cứu cơ sở lý luận và thực tiễn, chúng tôi đề xuất các bước hướng dẫn thực hiện biện pháp như sau:

Bước 1: GV tổ chức cho HS biểu diễn bài toán **S** dưới dạng trực quan (có thể sử dụng mô hình) để bài toán đó được quan sát tốt nhất.

Bước 2: GV sử dụng bảng biểu để HS liệt kê các giả thuyết trong đó có giả thuyết **G** giải thích tốt nhất cho **S.**

Bước 3: GV tổ chức cho HS thảo luận để tìm được giả thuyết **G;** là giả thuyết giải thích tốt nhất cho **S**.

Bước 4: HS dự đoán rằng **G** là lời giải thích tốt nhất cho **S**.

Bước 5: GV hướng dẫn HS sử dụng SL Toán học để kiểm chứng rằng giả thuyết **G** là lời giải thích tốt nhất.

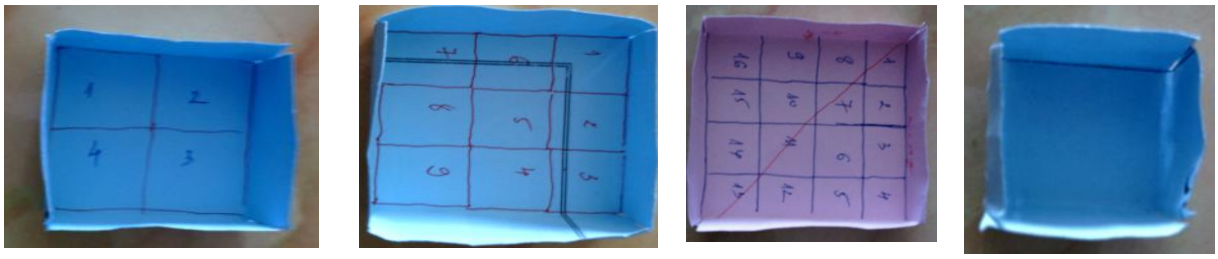
Ví dụ 3.6. Bài toán **S**: "Cho một hình vuông cạnh *a*. Người ta cắt ở bốn góc hình vuông bằng nhau, rồi gập hình vuông đó lại để được cái hộp chữ nhật không nắp. Hãy dự đoán cạnh của mỗi hình vuông bị cắt bằng bao nhiêu để thể tích của khối hộp là lớn nhất? Sử dụng SL Toán học để kiểm chứng điều mà em dự đoán là đúng".

Bước 1: GV tổ chức cho HS biểu diễn bài toán **S** dưới dạng trực quan để bài toán đó được quan sát tốt nhất.

Chia lớp học thành nhiều nhóm, GV đưa cho mỗi nhóm những tấm bìa hình vuông bằng nhau. Đưa ra các nhiệm vụ sau đây cho HS:

+ Cắt bốn góc của hình vuông đó các hình vuông bằng nhau. Hãy dự đoán xem cạnh của mỗi hình vuông được cắt bằng bao nhiêu để khi gấp thành hình hộp chữ nhật có được thể tích lớn nhất?

Khi khảo sát nhiều nhóm đã gấp thành các hình hộp chữ nhật như hình dưới đây:



Hình 3.20

Bước 2: Xuất hiện nhiều giả thuyết trong đó có giả thuyết **G** giải thích cho **S**

Sau khi gấp hình, từ một vài cách gấp hình, các nhóm đã liệt kê theo bảng dưới đây:

Các cách gấp hình vuông	x là cạnh hình vuông được cắt ở 4 góc ($0 < x < \frac{a}{2}$)	Thể tích hình lập phương có cạnh bằng x	Thể tích của khối hộp chữ nhật (Tổng thể tích của số hình lập phương có cạnh bằng x)
Chia thành 12 phần bằng nhau cả chiều ngang và dọc của hình vuông	$x = \frac{a}{12}$	$\left(\frac{a}{12}\right)^3$	$64.\left(\frac{a}{10}\right)^3 \approx 0,0579.a^3$

Chia thành 10 phần bằng nhau cả chiều ngang và dọc của hình vuông	$x=\frac{a}{10}$	$\left(\frac{a}{10}\right)^3$	$64.\left(\frac{a}{10}\right)^3 \approx 0,064.a^3$
Chia thành 8 phần bằng nhau cả chiều ngang và dọc của hình vuông	$x=\frac{a}{8}$	$\left(\frac{a}{8}\right)^3$	$36.\left(\frac{a}{8}\right)^3 \approx 0,0703.a^3$
Giả thuyết **G**: Chia thành 6 phần bằng nhau cả chiều ngang và dọc của hình vuông	$x=\frac{a}{6}$	$\left(\frac{a}{6}\right)^3$	$16.\left(\frac{a}{6}\right)^3 \approx 0,0741.a^3$
Chia thành 5 phần bằng nhau cả chiều ngang và dọc của hình vuông	$x=\frac{a}{5}$	$\left(\frac{a}{5}\right)^3$	$9.\left(\frac{a}{5}\right)^3 \approx 0,072.a^3$
Chia thành 4 phần bằng nhau cả chiều ngang và dọc của hình vuông	$x=\frac{a}{4}$	$\left(\frac{a}{4}\right)^3$	$4.\left(\frac{a}{4}\right)^3 \approx 0,0625.a^3$
Chia thành 3 phần bằng nhau cả chiều ngang và dọc của hình vuông	$x=\frac{a}{3}$	$\left(\frac{a}{3}\right)^3$	$\left(\frac{a}{3}\right)^3 \approx 0,03703.a^3$

Bước 3: HS thảo luận để PĐ rằng không có giả thuyết nào khác giải thích tốt cho **S** như **G**

Sau khi lập bảng liệt kê các giả thuyết để giải thích cho bài toán **S** thì các em nghĩ rằng giả thuyết **G** đã giải thích tốt nhất cho bài toán **S**.

Bước 4: HS dự đoán rằng **G** là lời giải thích tốt nhất cho **S**.

Qua khảo sát nghiên cứu đề tài, chúng tôi thấy nhiều nhóm đã dự đoán $x = \frac{a}{6}$ thì khối hộp chữ nhật tạo được có thể tích lớn nhất và $V_{\max} = \frac{16a^3}{216} = \frac{2a^3}{27}$ và các em tin rằng dự đoán của mình là đúng và tốt nhất có thể cho bài toán **S**.

Bước 5: GV hướng dẫn HS sử dụng SL Toán học để kiểm chứng rằng giả thuyết **G** là lời giải thích tốt nhất.

+ Để kiểm chứng dự đoán của mình là đúng các em CM điều vừa dự đoán theo SL Toán học như sau:

$V_{khoihopcn} = x.(a-2x).(a-2x)$.

Để V đạt max thì $x.(a-2x).(a-2x)$ đạt max. Bài toán chuyển thành tìm max của $x.(a-2x).(a-2x)$

Nhiều em đã sử dụng bất đẳng thức Cô-si để CM:

Ta có: $\frac{1}{4}.4x.(a-2x).(a-2x) \le \frac{1}{4}.\left(\frac{4x+a-2x+a-2x}{3}\right)^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}.4x.(a-2x).(a-2x) \le \frac{1}{4}.\left(\frac{2a}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}.4x.(a-2x).(a-2x) \le \frac{2a^3}{27}$$

Dấu "=" đạt được khi và chỉ khi $4x = a-2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$

Khi GV hỏi lý do nào em nhân 4 và chia 4 ở công thức tính thể tích hình hộp chữ nhật, các nhóm lý giải theo cách: Để khử -2*x* -2*x* em cần có 4*x* vì thế các em đã nhân 4 và chia 4 ở công thức tính thể tích của khối hộp chữ nhật.

Căn cứ của các bước lập luận

+ Công thức tính thể tích của khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ trong đó *a*,*b*,*c* là độ lớn của chiều dài, chiều rộng và chiều cao của khối hộp chữ nhật.

+ Bất đẳng thức Cô-si áp dụng cho ba số dương *x*,*y*,*z*: $\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{x.y.z}$

+ Các tính chất của bất đẳng thức:

$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$ (*n* là số nguyên dương)

$a < b \Leftrightarrow a.c < b.c \quad (c > 0)$

3.3.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp

GV lưu ý với việc lựa chọn bài toán HH để người học có khả năng xây dựng được mô hình biểu diễn trực quan của bài toán đó. GV lưu ý ở bước tổ chức cho HS tìm giả thuyết tốt nhất để giải thích cho bài toán, bước này GV nên có câu hỏi gợi mở để người học tìm tòi, phát hiện.

3.4. Biện pháp 4: Đề xuất các tình huống để người học phán đoán trong dạy học hình học nhờ sử dụng biểu diễn Toán học

3.4.1. Mục đích của biện pháp

Biện pháp 4 giúp các em hình thành và phát triển NLPĐ nhờ biểu diễn Toán học của một bài toán HH. Từ đó các em thấy được rằng mối quan hệ chặt chẽ giữa PĐ với biểu diễn trực quan của vấn đề. Trong quá trình biểu diễn trực quan bài toán các em có thể sử dụng một số phần mềm HH để hỗ trợ cho việc kiểm chứng PĐ của mình, củng cố niềm tin rằng PĐ của mình là đúng. Sau khi các em PĐ giả thuyết của bài toán thì các em đã sử dụng LLCCC đó là các căn cứ (định lý, tính chất, định nghĩa, tiên đề,...) và quy tắc SL để kiểm chứng và khẳng định PĐ của mình là đúng.

3.4.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp

Canadas và cộng sự của mình đã tổng hợp các loại PĐ và quy trình của mỗi loại PĐ. Trong đó PĐ nhờ biểu diễn trực quan được tiến hành thông qua các bước sau:

Chuyển bài toán thành biểu diễn trực quan; Xây dựng các biểu diễn trí tuệ cá thể về các yếu tố Toán học có liên quan; Quan sát các đặc trưng đặc biệt của biểu diễn; Hình thành PĐ dựa trên các đặc trưng đặc biệt của biểu diễn; Xác nhận hoặc hình thành sự chuyển đổi; Khái quát hóa PĐ; CM trường hợp tổng quát [42, tr.65].

Biện pháp 4 giúp các em có khả năng đưa một bài toán trừu tượng về bài toán trực quan nhờ biểu diễn trực quan. Một khi các em biểu diễn thành công thì vấn đề của bài toán có thể được tri giác để PĐ kết luận của bài toán và PĐ cách giải quyết bài toán. Ngoài ra, với biện pháp này các em có thể dùng các phần mềm HH hỗ trợ cho việc dự đoán của mình hoặc tạo niềm tin rằng PĐ của mình là đúng.

3.4.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp

Trên cơ sở nghiên cứu cơ sở lý luận và thực tiễn, chúng tôi đề xuất các bước hướng dẫn thực hiện biện pháp như sau:

Bước 1: GV hướng dẫn HS chuyển bài toán thành biểu diễn trực quan (hình vẽ, mô hình, ...);

Bước 2: GV tổ chức cho HS quan sát đặc trưng của biểu diễn có liên quan đến vấn đề cần giải quyết;

Bước 3: HS sử dụng công cụ phần mềm Toán học để thao tác, tính toán, đo đạc, vẽ thêm các đường phụ... hỗ trợ cho việc PĐ;

Bước 4: HS PĐ kết luận của bài toán dựa trên kết quả thu được;

Bước 5: GV hướng dẫn HS sử dụng SL Toán học để khẳng định dự đoán của mình là đúng.

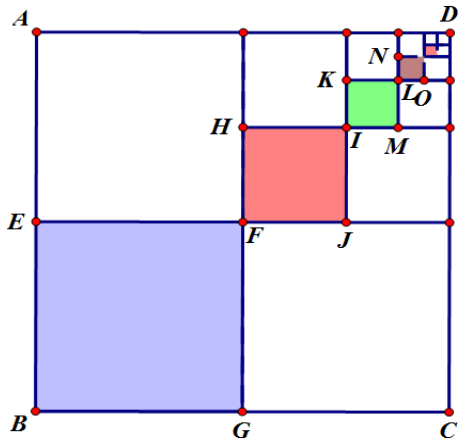
Ví dụ 3.7. "Cho hình vuông có diện tích là S, phân hoạch hình vuông này thành bốn hình vuông có diện tích là S_1 nhờ các đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối. Sau đó phân chia hình vuông có diện tích là S_1 thành bốn hình vuông có diện tích là S_2 tương tự như cách phân chia đầu tiên. Tiếp tục quá trình này có các hình vuông có diện tích là S_3, S_4, ..., S_k,... Em hãy dự đoán:

$m = \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + ... + S_k + ...}{S} = ?$ Và sử dụng SL Toán học để chứng tỏ dự đoán của mình là đúng.

Bước 1: GV hướng dẫn HS chuyển bài toán thành biểu diễn trực quan

Biểu diễn bài toán trên dưới dạng hình vẽ trực quan như sau:

Các hình được tô màu có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3, S_4, ..., S_k,...Tỉ số: $m = \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + ... + S_k + ...}{S}$ là tỉ số giữa tổng diện tích các hình vuông được tô màu với diện tích hình vuông ban đầu.



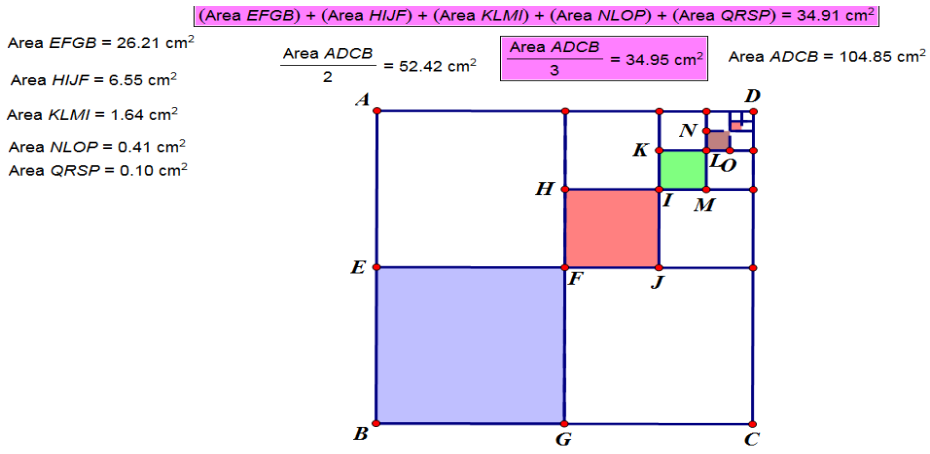
Hình 3.21

Bước 2: GV tổ chức cho HS quan sát đặc trưng của biểu diễn có liên quan đến vấn đề cần giải quyết

Dựa vào hình vẽ các em nhận thấy rằng: Vì $S_1 = \frac{1}{4}S$ và tổng các diện tích các hình vuông được tô màu nhỏ hơn diện tích của 1/2 hình vuông ban đầu nên $\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$ và suy đoán có khả năng m=1/3 chăng?.

Bước 3: HS sử dụng công cụ phần mềm Toán học để thao tác, tính toán, đo đạc, vẽ thêm các đường phụ... hỗ trợ cho việc PĐ.

Các em sử dụng phần mềm GSP dùng để thao tác, tính toán và đo đạc các yếu tố Toán học để hỗ trợ cho dự đoán của mình như sau:



Hình 3.22

Từ đó các em dự đoán rằng *m*=1/3.

Bước 4: Hình thành PĐ dựa trên kết quả thu được.

Đa số các em đều tin rằng *m*=1/3.

Bước 5: Dùng SL Toán học để khẳng định dự đoán của mình là đúng.

Do $S_1 = \frac{1}{2^2}S, S_2 = \frac{1}{2^2}S_1 = \frac{1}{2^4}S, S_3 = \frac{1}{2^6}S, ..., S_k = \frac{1}{2^{2k}}$ nên:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_k + ...}{S} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} + ... + \frac{S_k}{S} + ... = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ... \frac{1}{2^{2k}} + ...$$

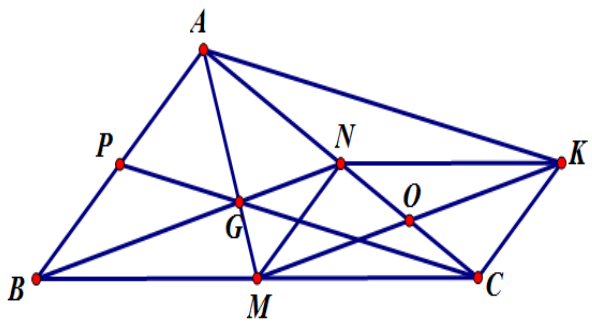
$$= \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 3.8. Cho tam giác *ABC*. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là trung điểm của *BC*, *AC*, *AB*. CM: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

Bước 1: *GV hướng dẫn để HS PĐ cách biểu diễn trực quan của bài toán*

GV: Kết luận bài toán: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ giúp các em liên hệ đến đẳng thức vectơ nào cũng có tổng ba vectơ bằng $\vec{0}$ và các vectơ đó tạo thành một tam giác?

HS: $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KI} = \vec{0}$ với *IJ*, *JK*, *KI* là ba cạnh của một tam giác.



Hình 3.23

GV: Làm thế nào để các em biểu diễn các trung tuyến *AM, BN* và *CP* tạo thành ba cạnh của một tam giác?

HS: + Chọn một cạnh của tam giác là trung tuyến *AM* hoặc *BN* hoặc *CP*.

+ Từ điểm đầu hoặc điểm cuối của đoạn thẳng *AM* (giả sử chọn cạnh thứ nhất là *AM*) kẻ đường thẳng song song và bằng với trung tuyến thứ hai.

+ CM cạnh còn lại song song và bằng trung tuyến thứ ba.

GV: Theo cách xác định đó, em hãy dự đoán tam giác cần tìm là tam giác nào?

HS: *AMK* trên hình 3.33 là tam giác cần tìm.

Bước 2: *HS giải thích PĐ của mình*

+ Chọn một trung tuyến làm cạnh của tam giác, giả sử trung tuyến *AM*.

+ Từ điểm *M* dựng $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{BN}$ suy ra tứ giác *BMKN* là hình bình hành.

+ Vậy, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NK}$ mà $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$ nên $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NK}$ hay tứ giác *MCKN* là hình bình hành.

+ Suy ra $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{NM}$ mà $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AP}$ nên $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AP}$ do đó tứ giác *APCK* là hình bình hành hay $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{KA}$.

+ Vậy, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MK}$; $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{KA}$, các trung tuyến *AM, BN* và *CP* được biểu diễn thành tam giác *AMK*.

Bước 3: *HS hình thành PĐ dựa trên kết quả thu được.*

Để CM $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ thì ta chỉ cần CM $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} = \vec{0}$

Bước 4: HS sử dụng SL Toán học để khẳng định dự đoán của mình là đúng.

Ta có: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MK}$; $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{KA}$ (theo cách dựng và lập luận ở bước 2) nên

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

3.4.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp

Việc lựa chọn bài toán để hướng dẫn người học biểu diễn Toán học đòi hỏi người thầy có kinh nghiệm và NL Toán học. GV cần lựa chọn bài toán điển hình mà HS có thể biểu diễn trực quan tốt, nếu lựa chọn bài toán không phù hợp sẽ không khuyến khích hoạt động PĐ, gây mất niềm tin, tính chủ động và sáng tạo của người học.

3.5. Biện pháp 5: Luyện tập cho học sinh biết lựa chọn tiền đề đúng cho hoạt động giải quyết vấn đề

3.5.1. Mục đích của biện pháp

Biện pháp 5 nhằm hướng đến luyện tập cho HS biết lựa chọn tiền đề đúng để GQVĐ đã cho. Để chọn được tiền đề đúng người học cần có khả năng nhận ra kết

luận từ các tiền đề đã cho hoặc biết phân tích theo lược đồ đi xuống để tìm đường lối CM.

3.5.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp

Tư duy logic đặc trưng bởi khả năng nhận ra kết luận từ các tiền đề đã cho, biết phân chia đầy đủ các trường hợp riêng, biết dự đoán kết quả cụ thể bằng con đường lý thuyết và biết tổng quát hóa các kết quả thu được [64; tr.142].

Như thế, trong tư duy logic đòi hỏi tính SL cao, đòi hỏi LLCCC. Đây là thành tố quan trọng của tư duy logic.

3.5.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp

Để luyện tập cho HS lựa chọn tiền đề đúng trong quá trình GQVĐ, chúng tôi đề xuất các bước sau đây để GV hướng dẫn HS thực hiện:

Bước 1: GV phân tích quá trình CM bài toán để tìm thấy các tiền đề đúng được đưa vào sử dụng cho việc GQVĐ

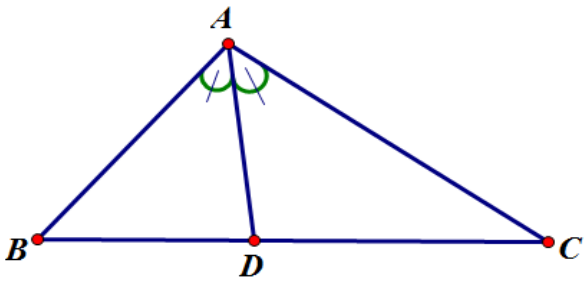
Bước 2: GV cho HS tổng hợp các tiền đề đúng đã được đưa vào để GQVĐ

Bước 3: GV cho HS trình bày lời giải bài toán (dựa trên tiền đề đúng đã được lựa chọn)

Bước 4: GV đưa một số bài tập để HS củng cố và luyện tập

Ví dụ 3.9: Ví dụ mô tả việc hướng dẫn HS lựa chọn tiền đề đúng trong quá trình CM công thức tính độ dài đường phân giác $l_a = AD$ theo ba cạnh của tam giác *ABC*.

Cho tam giác *ABC* có các cạnh $AB = c; AC = b, BC = a$. CM công thức tính độ dài đường phân giác $l_a = AD$ theo các các cạnh của tam giác *ABC* là: $l_a^2 = \dfrac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{b+c^{\ 2}}$



Hình 3.24

Bước 1: GV phân tích quá trình CM bài toán: $AD^2 = \dfrac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{b+c^{\ 2}}$ để tìm các tiền đề đúng được đưa vào sử dụng GQVĐ

- **Hướng giải quyết thứ nhất**: *Các bước lập luận sử dụng công cụ vectơ để CM bài toán.*

+ GV: Công thức nào biểu diễn mối quan hệ giữa độ dài AD và tích vô hướng $\overrightarrow{AD}^2$?

+ HS: $AD^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 = \overrightarrow{AD}^2$

+ GV: Để biểu diễn AD^2 theo các cạnh $AB = c; AC = b, BC = a$ của tam giác ABC thì chúng ta áp dụng quy tắc nào cho vectơ $\overrightarrow{AD}$?

+ HS: Áp dụng quy tắc ba điểm ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

+ GV: Sử dụng tính chất nào để biến đổi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}^{\,2}$?

+ HS: Sử dụng tính chất: $\vec{a} + \vec{b}^{\,2} = \vec{a}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$ (1)

+ GV: Hãy sử dụng tính chất (1) để biến đổi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}^{\,2}$?

+ HS: $AD^2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}^{\,2} = AB^2 + 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + BD^2$ (2)

+ GV: Em sử dụng định nghĩa nào để biến đổi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$?

+ HS: Định nghĩa về tích vô hướng của hai vectơ: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = -BA.BD.\cos B$ (3)

+ GV: Thay (3) vào (2) ta có được điều gì?

+ HS: $AD^2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}^{\,2} = AB^2 - 2.BA.BD.\cos B + BD^2$

+ GV: Hệ thức nào liên hệ giữa DB và DC?

+ HS: Hệ thức: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b}$ (4)

+ GV: Em hãy đưa (4) về hệ thức giữa BD và BC?

+ HS: $BD = \dfrac{c}{b+c}.BC$ (5)

+ GV: Thay vào (3), (5) vào biểu thức vectơ (2) ta có được điều gì?

+HS: $AD^2 = AB^2 - \dfrac{2c}{b+c}BA.BC.\cos B + \dfrac{c^2}{b+c}^{\,2}.BC^2 = c^2 - \dfrac{2a.c^2}{b+c}.\cos B + \dfrac{a^2.c^2}{b+c}^{\,2}$ (6)

+ GV: Công thức tính góc B của tam giác ABC là gì?

+ HS: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2.a.c}$ (7)

+ GV: Thay (7) vào (6) ta có được điều gì?

+ HS: $AD^2 = c^2 - \dfrac{2a.c^2}{b+c}.\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2.a.c} + \dfrac{a^2.c^2}{b+c}^{\,2}$ (8)

+ GV: Biến đổi biểu thức (8) ta có được điều gì? Sau khi biến đổi chúng ta đã có được điều cần CM chưa?

+ HS: Biến đổi biểu thức (8) ta có: $l_a^2 = \dfrac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{b+c}^{\,2}$

Hướng giải quyết thứ hai: *Các bước lập luận sử dụng HH đồng dạng*

GV hướng dẫn HS phân tích theo "lược đồ đi xuống" để tìm đường lối CM. Từ đó người học lựa chọn các tiền đề đúng được sử dụng trong quá trình GQVĐ.

(1) $AD^2 = AB.AC - \dfrac{AB.AC.BC^2}{(AB+AC)^2}$

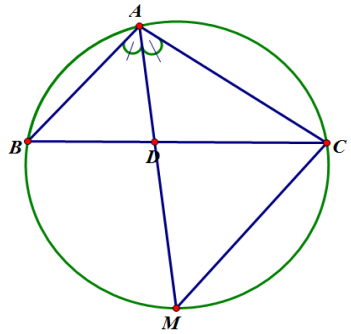
→ (2) $AD^2 = AB.AC - \dfrac{AB.BC}{AB+AC}.\dfrac{AC.BC}{AB+AC}$

→ (3) $AD^2 = AB.AC - BD.DC$

→ (4) $AD^2 = AB.AC - AD.DM$

→ (5) $AD.(AD+DM) = AB.AC$

→ (6) $AD.AM = AB.AC$ (tiền đề đúng)



Hình 3.25

GV hướng dẫn HS tìm các căn cứ trong mỗi bước lập luận của "lược đồ phân tích đi xuống" như sau:

+ GV: Em dựa vào căn cứ nào để lập luận từ bước (2) đến bước (3)?

+ HS: Sử dụng các biểu thức đã biết: $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AB}{AB+AC}$; $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{AC}{AB+AC}$

+ GV: Em dựa vào căn cứ nào để lập luận từ bước (3) đến bước (4)?

+ HS: Tam giác ADB đồng dạng với tam giác CDM

+ GV: Em dựa vào căn cứ nào để khẳng định bước (6) là đúng?

+ HS: Tam giác ABD đồng dạng với tam giác AMC

Bước 2: *GV cho HS tổng hợp các tiền đề đúng đã được đưa vào để GQVĐ*

- *Tổng hợp các tiền đề đúng theo hướng giải quyết thứ nhất*

+ GV: Vậy, những công thức, định nghĩa, tính chất nào được đưa vào để CM bài toán?

+ HS: Các công thức, định nghĩa, tính chất sau đây được đã đưa vào CM công thức:

- Công thức: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
- Quy tắc ba điểm: Với ba điểm *A, B, C* bất kỳ ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Định nghĩa tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$
- Tính chất tích vô hướng: $\vec{a}+\vec{b}^{\,2} = \vec{a}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$
- Từ hệ thức $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b}$ suy ra $\overrightarrow{BD} = \dfrac{c}{b+c}.\overrightarrow{BC}$
- Công thức tính các góc của tam giác *ABC*:

$\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$; $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC}$; $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2.AC.BC}$

➔ Các công thức, định nghĩa, tính chất liệt kê ở trên chính là các tiền đề đúng mà HS lựa chọn để GQVĐ.

- *Tổng hợp các tiền đề đúng theo hướng giải quyết thứ hai*

+ Tam giác ABD đồng dạng với tam giác AMC nên ta có: $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AD}{AC}$

+ Tam giác ADB đồng dạng với tam giác CDM nên ta có: $\dfrac{BD}{DM} = \dfrac{AD}{CD}$

+ Biểu thức: $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AB}{AB + AC}$; $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{AC}{AB + AC}$

Bước 3: GV cho HS trình bày lời giải của bài toán (dựa trên các tiền đề đúng đã được lựa chọn)

- ***Theo hướng thứ nhất***

Ta có: $AD^2 = (\overrightarrow{AD})^2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}^{\,2} = AB^2 + 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + BD^2$

$$= AB^2 - 2.\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} + \frac{c^2}{b+c}^{2}.BC^2 = AB^2 - \frac{2c}{b+c}BA.BC.\cos B + \frac{c^2}{b+c}^{2}.BC^2$$

$$= AB^2 - \frac{2c}{b+c}.BA.BC.\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} + \frac{c^2}{b+c}^{2}.BC^2$$

$$= AB^2 - \frac{c}{b+c}.\ AB^2 + BC^2 - AC^2\ + \frac{c^2}{b+c}^{2}.BC^2 = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{b+c}^{2}$$

- ***Theo hướng thứ hai***

HS trình bày lời giải theo hướng ngược lại của quá trình phân tích ở bước 2 như sau:

+ Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Kéo dài đường thẳng *AD* cắt đường tròn tại điểm *M*.

+ Vì tam giác ABD đồng dạng với tam giác AMC nên ta có: $AD.AM = AB.AC$

$\Leftrightarrow AD.(AD + DM) = AB.AC \Leftrightarrow AD^2 = AB.AC - AD.DM$

$\Leftrightarrow AD^2 = AB.AC - BD.DC$ (do tam giác ADB đồng dạng với tam giác CDM)

$$\Leftrightarrow AD^2 = AB.AC - \frac{AB.BC}{AB + AC}.\frac{AC.BC}{AB + AC} \Leftrightarrow AD^2 = AB.AC - \frac{AB.AC.BC^2}{(AB + AC)^2}$$

$\Leftrightarrow l_a^2 = \dfrac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{b+c^{\ 2}}$ (điều phải CM)

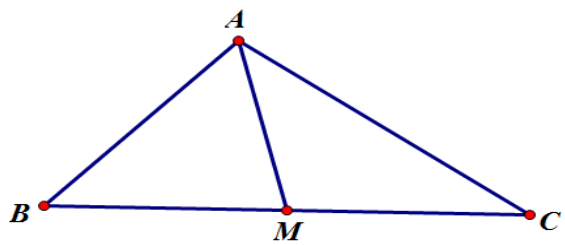
Bước 4: GV đưa bài tập để HS củng cố và luyện tập

Em hãy cho biết những định nghĩa, công thức, tính chất nào được lựa chọn để CM công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác *ABC*? Vận dụng để CM công thức dưới đây?

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

$$CM^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$



Hình 3.26

3.5.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp

Khi thực hiện biện pháp 5, GV cần thiết kế trước các tình huống học tập mà thông qua đó hình thành thói quen cho HS biết lựa chọn các tiền đề đúng, đó là các LLCCC trong việc GQVĐ.

3.6. Biện pháp 6: Luyện tập cho học sinh có thói quen kiểm tra, đánh giá duyệt lại các bước lập luận. So sánh cách giải quyết vấn đề khác nhau để cho cùng một kết quả

3.6.1. Mục đích của biện pháp

Mục đích của biện pháp 6 là luyện tập cho HS có thói quen kiểm tra, đánh giá các bước lập luận của mình sau khi trình bày lời giải. Hơn thế nữa, HS so sánh cách GQVĐ của mình với cách giải của người khác để thấy được cách giải quyết tối ưu. Thông qua biện pháp 6, người học hiểu được các quy tắc SL được sử dụng trong mỗi cách GQVĐ.

3.6.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp

Đó là khả năng HS hiểu và áp dụng các quy tắc SL vào việc giải bài toán, các QTSL thường dùng:

+ Các tam đoạn luận phổ biến (khẳng định, phủ định, lựa chọn, bắc cầu);

+ Quy tắc kết luận từ mệnh đề phổ biến;

+ Quy tắc SL quy nạp Toán học.

Biện pháp 6 giúp cho HS có thói quen kiểm tra, đánh giá các bước giải của mình. Xem xét các bước lập luận của mình đã tuân theo quy tắc SL chưa. Từ đó HS hiểu và áp dụng quy tắc SL cho những tình huống khác.

Biện pháp 6 tạo cơ hội cho HS được so sánh các cách GQVĐ khác nhau để hiểu được vai trò của mỗi cách giải. Qua các cách GQVĐ, HS hiểu được các quy tắc SL được ẩn chứa trong mỗi cách giải.

3.6.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp

Chúng tôi đề xuất các bước tổ chức thực hiện biện pháp như sau:

Bước 1: GV tổ chức hướng dẫn các nhóm HS giải bài toán theo các cách khác nhau

Bước 2: GV hướng dẫn HS tìm thấy căn cứ trong mỗi bước lập luận và các quy tắc SL được sử dụng trong các cách GQVĐ

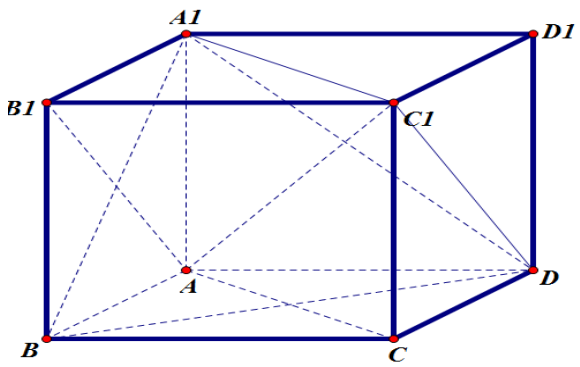
Bước 3: GV tổ chức cho HS đánh giá các căn cứ được sử dụng ở các bước lập luận của mỗi cách giải. Từ đó so sánh các cách GQVĐ mà chúng đều cho cùng một kết quả

Bước 4: GV đưa một số tình huống khác để HS luyện tập biện pháp

Ví dụ 3.10: Ví dụ hướng dẫn HS kiểm tra, duyệt lại các bước lập luận của các lời giải của HS. Từ đó các em so sánh các cách GQVĐ với nhau, các cách giải quyết này đều cho cùng một kết quả.

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

CM rằng: $AC_1 \perp (BDA_1)$



Hình 3.27

Bước 1: *GV tổ chức hướng dẫn các nhóm HS giải bài toán theo nhiều cách khác nhau*

- *Cách giải thứ nhất*:

+ Do $BD \perp (ACC_1A_1)$ nên $AC_1 \perp BD$

+ Do $BA_1 \perp (ADC_1B_1)$ nên $AC_1 \perp BA_1$

Vậy, $\begin{cases} AC_1 \perp BD \subset (BDA_1) \\ AC_1 \perp BA_1 \subset (BDA_1) \end{cases} \Rightarrow AC_1 \perp (BDA_1)$

- *Cách giải thứ hai*

+ Do $BD \perp (ACC_1A_1)$ nên $(BDA_1) \perp (ACC_1A_1)$

+ Do $BA_1 \perp (ADC_1B_1)$ nên $(BDA_1) \perp (ADC_1B_1)$

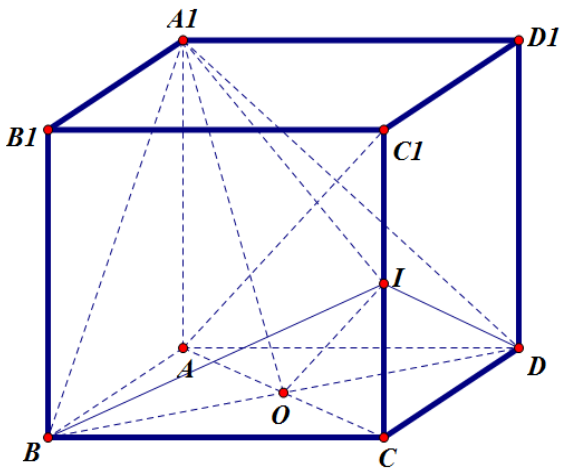
Vậy, $\begin{cases} (BDA_1) \perp (ACC_1A_1) \\ (BDA_1) \perp (ADC_1B_1) \\ (ACC_1A_1) \cap (ADC_1B_1) = AC_1 \end{cases} \Rightarrow AC_1 \perp (BDA_1)$

- *Cách giải thứ ba*

+ Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD và I là trung điểm của CC_1.

+ Tam giác IBD cân tại I nên OI là đường trung tuyến cũng là đường cao của tam giác IBD. Vậy, $OI \perp BD$

+ Trong tam giác vuông OCI: $OI^2 = OC^2 + IC^2 = \frac{3a^2}{4}$ (1)



Hình 3.28

+ Trong tam giác vuông ODA_1: $OA_1^2 = A_1D^2 - OD^2 = \frac{3a^2}{2}$ (2)

+ Trong tam giác vuông A_1IC_1: $A_1I^2 = A_1C_1^2 + IC_1^2 = \frac{9a^2}{4}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $OI^2 + OA_1^2 = IA_1^2$. → $OI \perp OA_1$

+ Ta có: $\begin{cases} OI \perp BD \subset (BDA_1) \\ OI \perp OA_1 \subset (BDA_1) \end{cases} \Rightarrow OI \perp (BDA_1)$

+ Vậy, $\begin{cases} OI \perp (BDA_1) \\ AC_1 // OI \end{cases} \Rightarrow AC_1 \perp (BDA_1)$

Bước 2: *GV hướng dẫn HS kiểm tra các căn cứ trong mỗi bước lập luận và các quy tắc SL được sử dụng trong mỗi cách GQVĐ của HS*

- *Hướng giải quyết thứ nhất*:

+ GV: Em đã sử dụng những căn cứ nào trong mỗi bước lập luận của mình?

+ HS: Các căn cứ trong mỗi bước lập luận của bài giải:

- Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng [9, tr.99]: "Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α)".

- Định lý [9, tr.99]: "Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy".

- *Hướng giải quyết thứ hai*:

+ GV: Em đã sử dụng những căn cứ nào trong mỗi bước lập luận của mình?

+ HS: Các căn cứ trong mỗi bước lập luận của bài giải:

- Định lý 1 [9, tr. 108]: " Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia".

- Định lý 2 [9, tr. 109]: " Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó".

- *Hướng giải quyết thứ ba*:

+ GV: Em đã sử dụng những căn cứ nào trong mỗi bước lập luận của mình?

+ HS: Các căn cứ trong mỗi bước lập luận của bài giải:

- Các tính chất, định lý đã học trong HH phẳng như:

Tính chất của tam giác cân;

Định lý Pitago.

- Tính chất 1 [9, tr. 101]: " Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia".

* Quy tắc SL được sử dụng trong lời giải của HS:

+ *Cách giải thứ nhất*:

p_1: "$AC_1 \perp BD$"; p_2: "$AC_1 \perp BA_1$" và q: "$AC_1 \perp (BDA_1)$"

Ta có quy tắc SL: $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q$ trong đó p_1, p_2 đúng nên q đúng.

+ *Cách giải thứ hai*:

p_1: "$(BDA_1) \perp (ACC_1A_1)$"; p_2: "$(BDA_1) \perp (ADC_1B_1)$" và q: "$AC_1 \perp (BDA_1)$"

Ta có quy tắc SL: $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q$ trong đó p_1, p_2 đúng nên q đúng.

+ *Cách giải thứ ba*:

p_1: "$OI \perp BD$"; p_2: "$OI \perp OA_1$"; p_3: "$AC_1 // OI$" và q: "$AC_1 \perp (BDA_1)$"

Ta có quy tắc SL: $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \Rightarrow q$ trong đó p_1, p_2, p_3 đúng nên q đúng.

Bước 3: GV tổ chức cho HS đánh giá các căn cứ được sử dụng ở các bước lập luận của mỗi cách giải. Từ đó so sánh các cách GQVĐ mà chúng đều cho cùng một kết quả

+ GV: Em hãy đánh giá (mức độ khó/dễ, quen thuộc hay không quen thuộc, khả năng huy động kiến thức) về các căn cứ ở mỗi bước lập luận của các cách giải?

+ HS trả lời câu hỏi:

- *Cách giải thứ nhất*
  - Căn cứ chính là nội dung kiến thức của bài 3: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Chương 3 HH 11).
  - Khả năng huy động các kiến thức dễ dàng vì đây là định nghĩa và định lý phổ biến và thường hay được sử dụng.
- *Cách giải thứ hai*
  - Căn cứ chính là nội dung kiến thức của bài 4: Hai mặt phẳng vuông góc (Chương 3 HH 11).
  - Khả năng huy động các kiến thức ở mức độ vừa phải vì đây là các định nghĩa, định lý được sử dụng chưa nhiều cho việc CM đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- *Cách giải thứ ba*

- Các căn cứ chính là các kiến thức quen thuộc đã được học ở HH phẳng và kiến thức liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng (bài 3 chương 3 HH 11)

- Khả năng huy động kiến thức ở mức độ khó hơn vì các em chưa quen thuộc với phương pháp sử dụng tính toán để CM vuông góc.

+ GV: Vậy, để CM đường thẳng vuông góc *d* với mặt phẳng (*P*) chúng ta biết được những cách nào?

+ HS trả lời câu hỏi:

Cách 1: CM đường thẳng *d* vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (*P*)

Cách 2: CM đường *d* là giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với (*P*)

Cách 3: CM đường thẳng *d* song song với đường thẳng *d*' mà *d*' vuông góc với (*P*)

+ GV: Em hãy so sánh các cách giải đã nêu?

- Cách 1 và cách 2: Sử dụng HH không gian thuần túy để GQVĐ
- Cách 3: Sử dụng công cụ tính toán để hỗ trợ cho việc CM.
- Ba cách giải đều sử dụng QTSL: $\models p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n \Rightarrow q$

Bước 4: GV đưa một số tình huống khác để HS luyện tập biện pháp

Cho tứ diện *ABCD* có các mặt *ABC* và *ABD* là các tam giác đều.

a. CM $AB \perp CD$ theo các cách khác nhau;

b. Em đã sử dụng định nghĩa, định lý hay tính chất nào để làm căn cứ cho mỗi bước lập luận của mình;

c. So sánh các cách giải đã thực hiện.

3.6.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp

Khi thực hiện biện pháp 6, GV cần thiết kế các tình huống chứa đựng nhiều lời giải khác nhau, sử dụng các quy tắc SL khác nhau để GQVĐ. Qua đó biện pháp rèn luyện cho HS có thói quen kiểm tra, đánh giá và duyệt lại các bước lập luận của lời giải, biết so sánh các cách GQVĐ khác nhau để tìm ra ưu điểm của mỗi cách.

3.7. Biện pháp 7: Tạo cơ hội để học sinh lập luận có căn cứ cho học sinh nhờ xem xét giả thiết và kết luận của bài toán dưới khía cạnh khác nhau

3.7.1. Mục đích của biện pháp

Mục đích của biện pháp 7 là bồi dưỡng LLCCC thông qua việc các em phân tích giả thiết và kết luận, từ đó xem xét giả thiết và kết luận đó theo nhiều khía cạnh khác nhau dựa vào căn cứ của lập luận. Ngoài ra, việc xây dựng giả thuyết từ bài toán gốc giúp các em hiểu sâu sắc hơn về các tính chất HH, mối quan hệ giữa các đối tượng HH, khả năng vận dụng linh hoạt, uyển chuyển của các định lý, tiên đề, định nghĩa trong HH. Sau cùng, biện pháp giúp các em hiểu được làm thế nào để xây dựng một bài toán, đó cũng là cách mà các em được làm quen với nghiên cứu khoa học trong pham vi hiểu biết của các em.

3.7.2. Cơ sở và vai trò của biện pháp

Khi triển khai thực hiện ở các trường THPT các em đã gặp nhiều khó khăn và lúng túng vì các em chưa nắm vững các định lý, tính chất, định nghĩa, các tiên đề của HH. Nhưng một khi các em thành công trong việc xây dựng các giả thuyết đã giúp các em có cách nhìn về HH một cách sâu sắc hơn, hiểu được các ý trong mỗi bước CM của bài toán HH. Ngoài ra, biện pháp đã giúp các hình thành những ý tưởng tốt trong việc lựa chọn căn cứ để xây dựng giả thuyết, tạo động cơ học tập tích cực trong môn HH, bước đầu giúp các em tập dược với nghiên cứu khoa học.

3.7.3. Hướng dẫn thực hiện biện pháp

Trên cơ sở nghiên cứu lý luận và trải nghiệm thực tiễn vân đề nghiên cứu, chúng tôi đề xuất quy trình thực hiện bao gồm những bước sau đây:

Bước 1: GV hướng dẫn HS tách một bộ phận của một hình HH ra khỏi đối tượng đó, đảm bảo không thay đổi giả thiết và kết luận của bài toán

Bước 2: HS tự xây dựng giả thuyết của bài toán mới bằng cách thay giả thiết và kết luận của bài toán bằng một điều khác tương đương.

Bước 3: HS phát biểu bài toán sau khi đã hoàn chỉnh.

Bước 4: HS GQVĐ đưa ra để thấy sự hợp lý của bài toán. Ở bước này các em có thể PĐ cách GQVĐ nhờ thêm một số yếu tố HH, nhờ hoạt động liên tưởng đến bài toán quen thuộc,....

Bước 5: GV khẳng định hoặc bác bỏ giả thuyết mà HS đã xây dựng.

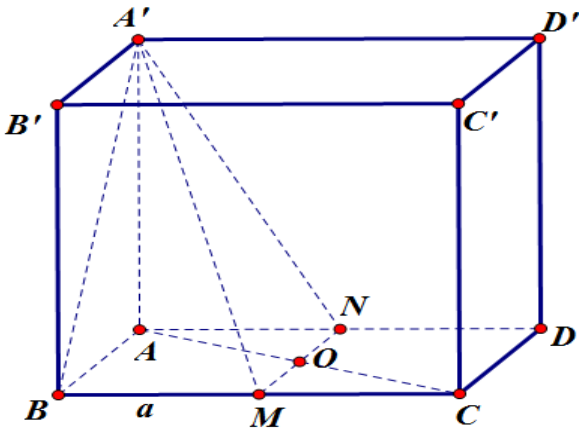
Ví dụ 3.11

Bước 1: *GV hướng dẫn HS tách một bộ phận của một hình HH ra khỏi đối tượng đó, đảm bảo không thay đổi giả thiết và kết luận của bài toán*

Bài toán gốc:

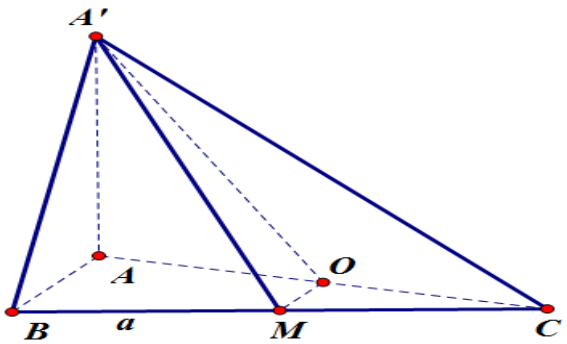
Cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'* có đáy là hình vuông cạnh bằng *a* và góc $A'BA = 60^0$. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *BC* và *AD*.

Xác định và tính khoảng cách từ điểm *A* đến (*A'MN*).



Hình 3.29

GV: Em hãy tách tứ diện *A'ABC* ra khỏi hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*.



Hình 3.30

Bước 2: *HS tự xây dựng giả thuyết của bài toán mới bằng cách thay giả thiết và kết luận của bài toán bằng một điều khác tương đương*

Chúng tôi đặt ra câu hỏi cho các nhóm trong lớp khảo sát. Hãy thay đổi giả thiết và kết luận của bài toán bằng một điều khác tương đương với nó

+ GV: Tam giác *ABC* là nửa hình vuông được nhìn ở khía cạnh nào?

+ HS: Tam giác *ABC* được nhìn ở khía cạnh là tam giác vuông cân tại điểm *B*.

+ GV: Em dựa vào căn cứ nào để có cách nhìn đó?

+ HS: Căn cứ của lập luận là: Tính chất của hình vuông.

Tương tự, HS thay đổi các giả thiết còn lại và kết luận bằng mệnh đề đúng tương đương sau đây:

+ $A'A \perp (ABC)$ được nhìn ở khía cạnh hai mặt bên cùng vuông góc với đáy thì giao tuyến của chúng vuông góc ở đáy, tức là:

$$\begin{cases} (A'AB) \perp (ABC) \\ (A'AC) \perp (ABC) \\ (A'AB) \cap (A'AC) = AA' \end{cases}$$

+ Căn cứ của lập luận là định lý: "Hai mặt phẳng (*P*), (*Q*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*R*) thì giao tuyến của (*P*) và (*Q*) vuông góc với (*R*)".

+ Góc $A'BA = 60^0$ được nhìn ở khía cạnh góc giữa hai mặt phẳng (*A'BC*) và (*ABC*) bằng 60^0

+ Căn cứ của lập luận là định nghĩa: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó".

+ *O* là trung điểm *AC* được nhìn ở khía cạnh *MO* là đường trung bình của tam giác *CAB*.

+ Căn cứ của lập luận là định nghĩa đường trung bình của tam giác.

+ Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (*A'MO*) nhìn ở khía cạnh khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AB* và *A'O* do $\begin{cases} AB // (A'MO) \\ A'M \subset (A'MO) \end{cases}$.

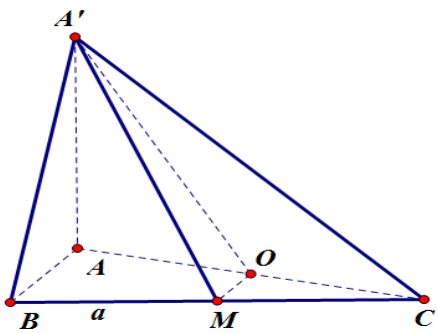
+ Căn cứ của lập luận là các định nghĩa sau đây:

"Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách giữa một trong hai đường đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại";

và định nghĩa: "khoảng cách giữa đường thẳng *a* và mặt phẳng (*P*) song song với *a* là khoảng cách từ một điểm nào đó của *a* đến mặt phẳng (*P*)".

Bước 3: Sau khi điều chỉnh các giả thuyết của bài toán đã cho, nhiều các em phát biểu bài toán mới như sau:

Bài toán được xây dựng: Cho hình chóp A'.*ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, *AB*=a, hai mặt phẳng (*A'AB*) và (*A'AC*) cùng vuông góc với đáy. Gọi *M* là điểm nằm trên *BC* sao cho *MO* là đường trung bình của tam giác *CAB*. Biết góc giữa hai mặt phẳng (*A'BC*) và (*ABC*) bằng 60^0. Xác định và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *A'O* theo *a*.



Hình 3.31

Bước 4: HS sử dụng SL Toán học để thấy được tính hợp lý của giả thuyết được xây dựng.

+ Do $\begin{cases}(A'AB)\perp(ABC)\\(A'AC)\perp(ABC)\\(A'AB)\cap(A'AC)=AA'\end{cases}$ nên $AA'\perp(ABC)$

+ Xác định và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AB* và *A'M*.

Do $\begin{cases}AB//(A'PO)\\A'M\subset(A'MO)\end{cases}$ nên $d(AB,A'O)=d(A,(A'MO))$. Nhưng khi xem xét để giải quyết việc tính khoảng cách từ *A* đến (*A'MO*) dựa vào hình vẽ 3.41 các em gặp khó khăn và trở ngại bởi sự giới hạn của không gian trên hình vẽ này. Qua thảo luận giữa các thành viên trong mỗi nhóm, nhiều nhóm đã có cách giải quyết đó là: Việc xác định khoảng cách từ điểm *A* đến (*A'MO*) ở hình vẽ 3.41 và việc xác định khoảng cách từ *A* đến (*A'MN*) ở hình vẽ 3.42 là giống nhau bởi lẽ hai mặt phẳng (*A'MN*) và (*A'MO*) là một. Và các em cho rằng việc xác định khoảng cách từ cách từ *A* đến (*A'MN*) trên hình vẽ 3.42 là dễ tưởng tượng trong không gian hơn. Như thế, các em giải quyết của bài toán mới nhờ phép liên tưởng đến bài toán gốc đã quen thuộc trước đó. Cụ thể:

Trong (*A'AD*) từ *A* dựng *AH* vuông góc với *A'N*.

Mặt khác:

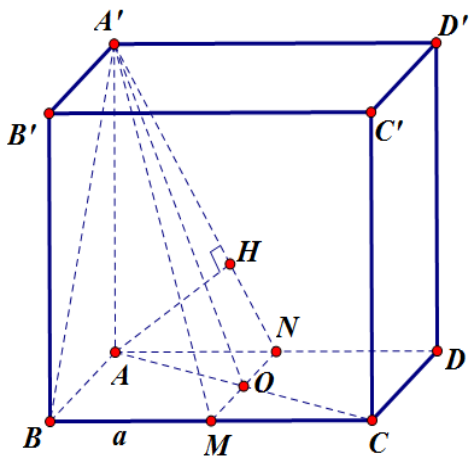
$$\begin{cases}MN\perp AD\subset(A'AD)\\MN\perp AA'\subset(A'AD)\Rightarrow MN\perp(A'AD)\\AD\cap AA'=\{A\}\end{cases}$$

mà $AH\subset(A'AD)$. Do đó $AH\perp(A'MN)$.

Vậy, $d(A,(A'MN))=AH$.

Xét tam giác vuông *A'BA* ta có:

$AA'=AB.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.



Hình 3.32

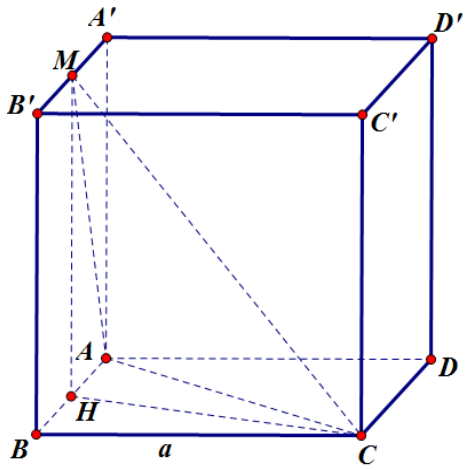
Xét tam giác vuông *A'AN* ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{13}{a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{39}}{13}$

Ví dụ 3.12.

Bài toán: Cho hình hộp đứng *ABCD.A'B'C'D'* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh bằng a, và $ABC = 60^0$.

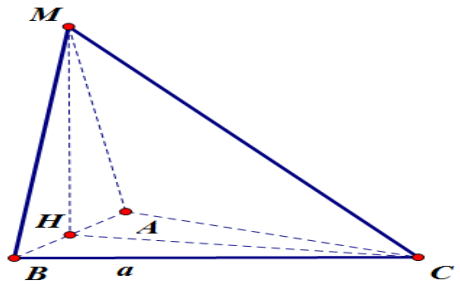
Gọi *M, H* lần lượt là trung điểm của *A'B'* và *AB*. $MCH = 30^0$.

Xác định và tính khoảng cách từ điểm *H* đến (*MAC*).



Hình 3.33

Tách tứ diện *MABC* ra khỏi hình hộp đứng *ABCD.A'B'C'D'*.



Hình 3.34

Bước 2: *HS tự xây dựng giả thuyết của bài toán mới bằng cách thay giả thiết và kết luận của bài toán bằng một điều khác tương đương.*

Ta điều chỉnh giả thiết trên bằng cách nhìn mỗi bộ phận của cái riêng ở nhiều khía cạnh khác nhau:

+ Tam giác *ABC* là nửa hình thoi có cạnh bằng *a* và $ABC = 60^0$ được nhìn dưới khía cạnh là tam giác đều cạnh *a*.

+ Căn cứ của lập luận là: tính chất của hình thoi.

+ $MH \perp (ABC)$ được nhìn ở khía cạnh hai mặt phẳng vuông góc với nhau, một đường thẳng nằm trong mặt này nếu vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia. Tức là: $(MAB) \perp (ABC)$, tam giác *MAB* cân tại *M*. Gọi *H* là trung điểm của *AB* suy ra $MH \perp (ABC)$.

+ Căn cứ của lập luận là định lý: "Hai mặt phẳng (*P*), (*Q*) vuông góc với nhau, một đường thẳng bất kỳ nằm trong mặt phẳng này vuông góc giao tuyến của (*P*) và (*Q*) thì vuông góc với mặt phẳng kia".

+ $MCH = 30^0$ được nhìn ở khía cạnh góc giữa đường thẳng *MC* và (*ABC*) hợp với nhau một góc 30^0.

+ Căn cứ của lập luận là định nghĩa*:* "Nếu đường thẳng *a* không vuông góc với mặt phẳng (*P*) thì góc giữa *a* và hình chiếu *a*'của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng *a* và mặt phẳng (*P*)".

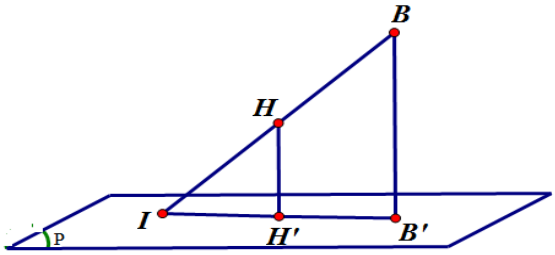
+ Khoảng cách từ điểm *H* đến (*MAC*) được nhìn dưới khía cạnh bằng ½ khoảng cách từ điểm *B* đến (*MAC*).

+ Căn cứ của lập luận này chính là vận dụng định lý Talet:

Vì *HH*'//*BB*' nên theo định lý Talet ta có:

$\frac{HH'}{BB'} = \frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$.

Từ đó ta có $BB' = 2.HH'$ tức là $d(B,(P)) = 2.d(H,(P))$

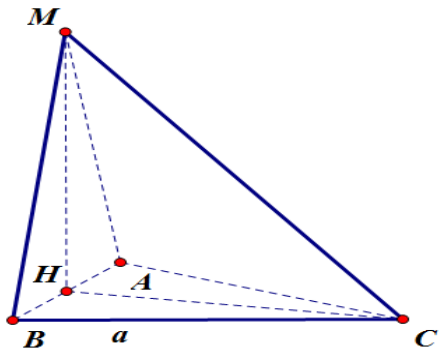


Hình 3.35

Bước 3: Sau khi hoàn chỉnh các giả thiết bài toán được phát biểu như sau:

Bài toán được xây dựng:

Cho hình chóp *M.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*, tam giác *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (*ABC*), góc hợp bởi cạnh *MC* và (*ABC*) là 30^0. Xác định và tính khoảng cách từ điểm *B* đến (*MAC*).



Hình 3.36

Bước 4: Kiểm chứng giả thuyết để khẳng định tính đúng đắn của bài toán đưa ra.

Gọi *H* là trung điểm của *AB*.

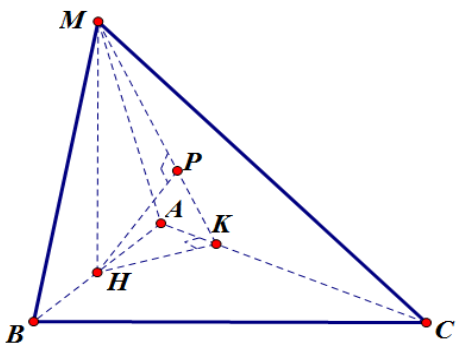
$$+ \begin{cases} (MAB) \perp (ABC) \\ (MAB) \cap (ABC) = AB \\ MH \perp AB \ (do\ SA = SB) \end{cases} \text{ nên } MH \perp (ABC)$$

+ Xác định và tính khoảng cách từ điểm *B* đến (*MAC*).

Do $d(B,(MAC) = 2d(H,(MAC))$ nên các nhóm tiến hành xác định và tính khoảng cách từ *H* đến (*MAC*).

Xác định và tính $d(H,(MAC))$:

Trong (ABC) kẻ $HK \perp AC$. Do $\begin{cases}(MHK)\perp(MAC)\\(MHK)\cap(MAC)=MK\end{cases}$ (*hình 3.47*) nên trong (MHK) ta dựng $HP \perp MK$ thì $HP \perp (MAC)$ vì thế HP chính là khoảng cách từ H đến (MAC). Từ đó suy ra khoảng cách từ B đến (MAC).



Hình 3.37

3.7.4. Một số lưu ý khi thực hiện biện pháp

Để thực hiện biện pháp 7 có hiệu quả, GV nên lựa chọn các bài toán mà giả thiết và kết luận được biến đổi theo nhiều khía cạnh khác nhau. Tùy vào mức độ huy động kiến thức của HS mà các em xây dựng các giả thuyết khác nhau.

Biện pháp 1 đến biện pháp 7 giải quyết những khó khăn nào của HS đã được đề cập ở chương 2:

Biện pháp 1 đến biện pháp 4 khắc phục được vấn đề, đó là các em không biết dựa trên cơ sở nào để PĐ giả thuyết của bài toán, các em không biết bắt đầu từ đâu để PĐ. Các biện pháp 1 đến biện pháp 2 đã xây dựng quy trình các bước để các em dựa vào đó PĐ công thức hoặc giả thuyết của một bài toán. Từ đây, khi dự đoán giả thuyết của bài toán nào đó, các em có thói quen xem xét bài toán đó có liên hệ với bài toán nào đã học trước đó hay không, xem nó có phải là một trường hợp riêng của bài toán khái quát nào không, xem chúng có tương tự với bài toán nào đã biết không.

Thông thường các em chỉ có thói quen CM bài toán mà không duyệt lại các căn cứ cho mỗi bước lập luận. Biện pháp 5, 6 trang bị cho các em luôn có thói quen tìm các căn cứ cho mỗi bước lập luận, so sánh, đối chiếu các cách GQVĐ cho một bài toán, khắc phục khó khăn khi diễn đạt các ý lập luận của người học.

Biện pháp 7 khắc phục được vấn đề, đó là các em xem xét các bài toán như là những bài toán độc lập, không có mối quan hệ nào cả. Vì thế các em thường có thói quen giải toán hơn là xây dựng giả thuyết bài toán. Việc bồi dưỡng LLCCC không chỉ giúp các em nhìn các vấn đề theo nhiều hướng khác nhau mà còn giúp các em hiểu sâu hơn các định lý, định nghĩa; thấy được mối quan hệ giữa chúng khi đặt vào trong những tình huống cụ thể.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương 3 chúng tôi đã trình bày:

Đề xuất bốn biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ trong DH HH ở trường THPT nhờ sử dụng các SL nghe có lý: Tương tự, quy nạp, SL ngoại suy, khái quát hóa; tri thức về phép duy vật biện chứng đó là xem xét các sự vật, hiện tượng dưới nhiều khía cạnh khác nhau để xây dựng giả thuyết mới và nhờ biểu diễn Toán học;

Đề xuất ba biện pháp bồi dưỡng cho HS LLCCC trong DH HH ở trường THPT đó là: Kiểm tra và duyệt lại các tiền đề đúng đã sử dụng; tìm các căn cứ cho mỗi bước lập luận, so sánh các cách GQVĐ của một bài toán; xây dựng giả thuyết bằng cách thay đổi giả thiết và kết luận bằng một mệnh đề khác tương đương.

Trong mỗi một biện pháp sư phạm, dựa trên cơ sở lý luận và thực tiễn của mỗi biện pháp mà Luận án trình bày các vấn đề: Mục đích của biện pháp; cơ sở và vai trò của biện pháp; hướng dẫn thực hiện biện pháp theo quy trình; một số lưu ý khi thực hiện biện pháp.

Mỗi biện pháp đề xuất đều có phân tích quy trình PĐ và LLCCC, đó là các bước thực hiện nhằm đưa ra PĐ và sử dụng SL, quy tắc SL để kiểm chứng tính đúng đắn của các dự đoán đó.

CHƯƠNG 4
THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

4.1. Mục đích, yêu cầu, nội dung thực nghiệm

4.1.1. Mục đích

Mục đích cơ bản của thực nghiệm sư phạm là:

+ Bước đầu khảo sát, đánh giá NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở một số trường THPT trên địa bàn thành phố Hà Nội.

+ Xét tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp sư phạm đã đề xuất.

+ Làm cơ sở để kiểm nghiệm giả thuyết khoa học của Luận án.

4.1.2. Yêu cầu

Thực nghiệm sư phạm phải đảm bảo tính khách quan, phù hợp với đối tượng HS và sát với tình hình thực tế DH HH ở trường THPT hiện nay.

4.1.3. Nội dung thực nghiệm

4.1.3.1. Một số quan điểm lựa chọn nội dung thực nghiệm

Việc thực nghiệm sư phạm nhằm vào mục đích đánh giá NLPĐ và LLCCC của HS trong DH HH ở trường THPT. Vì lí do đó việc lựa chọn nội dung thực nghiệm được quán triệt các quan điểm sau:

a. Lựa chọn nội dung gắn với các tình huống để HS THPT PĐ tri thức HH mới tương thích với tri thức đã biết.

b. Việc lựa chọn nội dung với sự cân nhắc sao cho HS có khả năng PĐ và LLCCC để tìm ra bài toán mới và xác định được căn cứ cho mỗi bước lập luận trong cách GQVĐ của bài toán mới.

c. Nội dung chọn khảo sát thực nghiệm được đặt trong tình huống HS có thể PĐ giả thuyết và PĐ cách GQVĐ tùy thuộc vào vốn kiến thức và kinh nghiệm sẵn có của các em.

d. Nội dung thực nghiệm hướng vào việc bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC của HS trong học tập và thử nghiệm một số Biện pháp đã nêu trong chương 3 của Luận án.

4.1.3.2. Chương trình dạy học thực nghiệm

Chương trình HH ở trường THPT gồm các nội dung cơ bản: HH vectơ, phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng, HH không gian tổng hợp, phương pháp tọa độ trong mặt phẳng và trong không gian. Chúng tôi đã chọn một số bài học trong chủ đề HH không gian tổng hợp để tiến hành dạy thực nghiệm.

*** Nội dung bài dạy thực nghiệm:**

Bài 1: Bài tập (khoảng cách) (lớp 11)

Bài 2: Bài tập (Khái niệm về thể tích khối đa diện) (lớp 12)

Bài 3: Ôn tập chương II: Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu (lớp 12)

*** Kiểm tra:**

Ba bài kiểm tra, mỗi bài kiểm tra có thời lượng một tiết, đánh giá sự hiểu biết của các em về kiến thức HH không gian tổng hợp cho hai khối: Khối 11 và khối 12. (*Chi tiết ở phụ lục 5*)

4.1.3.3. Giáo án dạy học thực nghiệm

Các giáo án thực nghiệm được biện soạn phù hợp với thiết kế giáo án hiện nay, phù hợp với yêu cầu đổi mới PPDH, nội dung trong mỗi giáo án được biên soạn theo hướng bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS.

Chúng tôi lựa chọn ba giáo án để tổ chức giảng dạy trên các lớp thực nghiệm. (*Chi tiết ở phụ lục 4*)

4.2. Thời gian, quy trình và phương pháp thực nghiệm sư phạm

4.2.1. Thời gian thực nghiệm sư phạm

Căn cứ vào những yêu cầu cụ thể của Luận án, chúng tôi tiến hành theo hai vòng:

Vòng 1: Năm học 2013 - 2014, thực nghiệm lần 1 tại bốn lớp: Các lớp thực nghiệm: $11A_2$, $11A_4$ và các lớp đối chứng $11A_1$, $11A_3$ tại trường THPT Hà Đông, Hà Nội.

Vòng 2: Năm học 2014 - 2015, thực nghiệm lần 2 tại các lớp khối 12 của ba trường: THPT Tây Hồ, THPT Trần Hưng Đạo – Hà Đông, THPT Quang Trung – Hà Đông (thuộc thành phố Hà Nội), trong đó ba lớp thực nghiệm: $12A_2$, $12A_4$, $12A_5$ và ba lớp đối chứng: $12A_1$, $12A_3$, $12A_4$ tại trường THPT Tây Hồ, một lớp thực nghiệm $12A_2$ và một lớp đối chứng $12A_1$ tại trường THPT Quang Trung – Hà Đông; hai lớp thực nghiệm: $12A_2$, $12A_4$ và hai lớp đối chứng: $12A_1$, $12A_3$ tại trường THPT Trần Hưng Đạo – Hà Đông.

Thực nghiệm vòng 1 nhằm mục đích kiểm chứng thiết kế giờ học theo tiếp cận tổng thể; kiểm chứng cách thức tổ chức DH; kiểm chứng cách thức dạy có sử

dụng các biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT. Sau đó, tiến hành điều chỉnh cho thực nghiệm vòng 2.

Thực nghiệm vòng 2 nhằm mục đích kiểm chứng việc áp dụng đồng bộ các biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT cho đối tượng HS ở các môi trường khác nhau.

4.2.2. Quy trình tổ chức thực nghiệm sư phạm

Thực nghiệm sư phạm được tiến hành theo quy trình sau:

+ Chúng tôi chọn lớp thực nghiệm và đối chứng có chất lượng học tập của HS tương đương nhau.

+ Chúng tôi thiết kế bài học theo các chủ đề đã lựa chọn.

+ Chúng tôi dạy lớp thực nghiệm với các giáo án được biên soạn theo hướng bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC cho HS; GV lớp đối chứng dạy theo phương pháp cũ.

+ Chúng tôi tiến hành phỏng vấn GV và HS sau giờ học để kiểm chứng và rút kinh nghiệm những mặt không thể đo được qua bài kiểm tra.

4.2.3. Phương pháp thực nghiệm sư phạm

4.2.3.1. Nội dung đánh giá

Hiệu quả của việc sử dụng các biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC đối với việc đáp ứng mục tiêu giáo dục thông qua tiến hành các giờ học được chúng tôi đánh giá trên cơ sở:

+ Sử dụng phiếu khảo sát dành cho HS với các câu hỏi kiểm tra sự hiểu biết của HS về nội dung kiến thức;

+ Kiểm tra kiến thức của từng cá nhân của lớp thực nghiệm và lớp đối chứng thông qua bài kiểm tra tự luận sau nội dung thực nghiệm;

+ Các kỹ năng học tập: Kỹ năng lập luận, kỹ năng trình bày; kỹ năng xử lý thông tin

+ Kỹ năng sử dụng các biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH: Thông qua quan sát các giờ học tiếp theo và các hoạt động ngoài giờ;

+ Sự tiến bộ của HS trong học tập nói chung: Thông qua quan sát và đánh giá của các GV khác.

4.2.3.2. Phương pháp đánh giá thực nghiệm sư phạm

Để đánh giá những nội dung trên, chúng tôi sử dụng bốn công cụ:

+ ***Kiểm tra tự luận:*** Nhằm đánh giá mức độ PĐ tri thức của HS qua các tiết học. Kiểm tra khả năng PĐ và LLCCC của từng cá nhân của lớp thực nghiệm và lớp đối chứng thông qua bài kiểm tra tự luận. Nội dung kiểm tra dựa vào các câu hỏi mà mức độ khó tương đương câu hỏi trong SGK.

+ ***Phiếu học tập dành cho HS*** Để đánh giá mức độ nhận thức, nắm bắt và thể hiện việc sử dụng các biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC, chúng tôi sử dụng phiếu học tập. Sử dụng phiếu học tập với các câu hỏi kiểm tra NL PĐ và LLCCC của HS sau mỗi bài học thực nghiệm.

+ ***Phỏng vấn sau thực nghiệm dành cho GV và HS*** *(Chi tiết ở phụ lục 6, 7)**:*** Để có những thông tin về tác động của việc sử dụng các biện pháp bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH HH, chúng tôi sử dụng phương pháp phỏng vấn nhằm làm sáng tỏ những thông tin. Những phỏng vấn này được tiến hành qua phiếu hoặc theo cách trò chuyện với người học, kết hợp quan sát những biểu hiện bên ngoài của đối tượng. Kết quả phỏng vấn được xử lý và được phân tích định tính.

+ ***Phương pháp thống kê Toán học***

Sau khi chấm các bài kiểm tra (các điểm là số nguyên) của HS, chúng ta có thể tính được các thông số thống kê sau:

+ Điểm trung bình của các bài kiểm tra bằng công thức: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=0}^{10} x_i . f_i}{N}$, trong đó N là số bài kiểm tra (số HS làm bài kiểm tra), x_i là loại điểm (Ví dụ: điểm 0,1,2,...,10) và (f_i) là tần số các điểm mà HS đạt được.

+ Phương sai được tính bằng công thức: $s^2 = \dfrac{\sum_{i=0}^{10} (x_i - \bar{x})^2 . f_i}{N-1}$

+ Độ lệch chuẩn được tính bằng công thức: $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=0}^{10} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{N-1}}$

+ Hệ số biến thiên (hệ số phân tán) V = $\dfrac{s}{\bar{x}}$ (%), hệ số này càng thấp thì chất lượng bài kiểm tra càng cao.

+ Sử dụng phép thử t - student để xem xét tính hiệu quả của thực nghiệm sư phạm, ta có kết quả $t = \sqrt{\frac{\bar{x}}{S_{TN}}}$, tra bảng phân phối t - student, nếu t > t_α chứng tỏ thực nghiệm có hiệu quả rõ rệt.

+ Kiểm định phương sai và giả thiết H_0:

- Kiểm định phương sai bằng giả thiết E_0: *"Sự khác nhau giữa các phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa"* với đại lượng $F = \frac{S_{TN}^2}{S_{DC}^2}$

- Nếu $F < F_\alpha$, khẳng định phương sai như nhau, tiếp tục kiểm định giả thiết H_0: "*Sự khác nhau giữa các điểm trung bình ở hai mẫu là không có ý nghĩa với phương sai như nhau*" bằng công thức:

$$t = \frac{\overline{x_{TN}} - \overline{x_{DC}}}{\sqrt{\frac{(N_{TN}-1)s_{TN}^2 + (N_{DC}-1)s_{DC}^2}{N_{TN}+N_{DC}-2}} \cdot \sqrt{\frac{N_{TN}+N_{DC}}{N_{TN}.N_{DC}}}}$$

- Nếu $F > F_\alpha$, khẳng định phương sai khác nhau, tiếp tục kiểm định giả thiết H_0: "*Sự khác nhau giữa các điểm trung bình ở hai mẫu là không có ý nghĩa với phương sai như nhau"* theo công thức: $t = \frac{\overline{x_{TN}} - \overline{x_{DC}}}{\sqrt{\frac{S_{TN}^2}{N_{TN}} + \frac{S_{DC}^2}{N_{DC}}}}$

Sử dụng phương pháp thống kê Toán học để có cơ sở khoa học nhằm khẳng định chất lượng của lớp thực nghiệm cao hơn lớp đối chứng.

4.3. Tiến trình thực nghiệm sư phạm

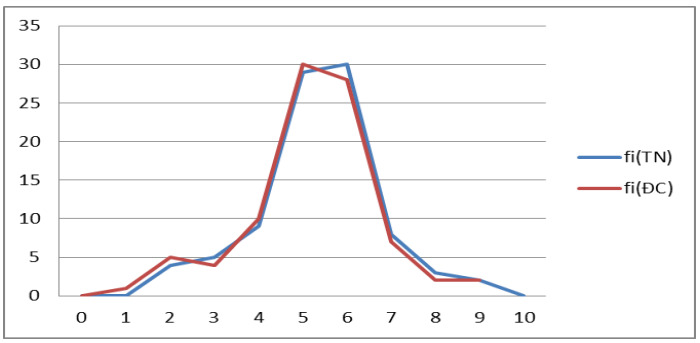
4.3.1. Thực nghiệm sư phạm vòng 1 (Năm học 2013 - 2014)

4.3.1.1. Phân tích chất lượng học sinh trước khi tiến hành thực nghiệm

Để tiến hành chọn mẫu thực nghiệm chúng tôi đã tiến hành cho HS làm bài kiểm tra và phân tích kết quả kiểm tra, chúng tôi chọn được hai nhóm thực nghiệm và đối chứng có NL Toán học tương đương nhau: 90 HS thuộc lớp thực nghiệm: 11A1, 11A3 và 89 HS thuộc lớp đối chứng: 11A2, 11A4 của trường THPT Hà Đông, Hà Nội.

Bảng 4.1. Phân bố điểm kiểm tra chất lượng của nhóm lớp thực nghiệm và đối chứng trước thực nghiệm vòng 1

x_i	Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i (Thực nghiệm)	90	0	0	4	5	9	29	30	8	3	2	0
n_i (Đối chứng)	89	0	1	5	4	10	30	28	7	2	2	0



Biểu đồ 4.1. Đa giác đồ của lớp thực nghiệm và lớp đối chứng trước thực nghiệm vòng 1

Biểu đồ 4.1 cho thấy đỉnh của hai đa giác đồ gần ngang nhau, điều này chứng tỏ NL Toán học của nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng ở các lớp của khối 11 là tương đương nhau.

Sử dụng phương pháp thống kê, chúng ta thu được kết quả như sau:

Bảng 4.2. Bảng xử lý số liệu thống kê của hai nhóm trước khi thực nghiệm vòng 1

Nhóm thực nghiệm (N_{TN}= 90)					Nhóm đối chứng ($N_{ĐC}$ = 89)				
x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2.n_i$	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2.n_i$
0	0	-5.36	28.7296	0	0	0	-5.21	27.1441	0
1	0	-4.36	19.0096	0	1	1	-4.21	17.7241	17.724
2	4	-3.36	11.2896	45.158	2	5	-3.21	10.3041	51.521
3	5	-2.36	5.5696	27.848	3	4	-2.21	4.8841	19.536
4	9	-1.36	1.8496	16.646	4	10	-1.21	1.4641	14.641
5	29	-0.36	0.1296	3.758	5	30	-0.21	0.0441	1.323
6	30	0.64	0.4096	12.288	6	28	0.79	0.6241	17.475
7	8	1.64	2.6896	21.517	7	7	1.79	3.2041	22.429
8	3	2.64	6.9696	20.909	8	2	2.79	7.7841	15.568
9	2	3.64	13.2496	26.499	9	2	3.79	14.3641	28.728
10	0	4.64	21.5296	0	10	0	4.79	22.9441	0

Kết quả xử lý số liệu thống kê:

Bảng 4.3. Kết quả số liệu thống kê của hai nhóm trước khi thực nghiệm vòng 1

Nội dung	Nhóm thực nghiệm	Nhóm đối chứng
Điểm trung bình	$\overline{x_{TN}} \approx 5.36$	$\overline{x_{DC}} \approx 5.21$
Phương sai	$S_{TN}^2 \approx 1.96$	$S_{DC}^2 \approx 2.15$
Độ lệch chuẩn	$S_{TN} = 1.4$	$S_{DC} \approx 1.47$

Tiến hành kiểm định phương sai của nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng với giả thuyết E_0: "*Sự khác nhau giữa các phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa*".

Đại lượng kiểm định: $F = \frac{S_{DC}^2}{S_{TN}^2} = \frac{2.15}{1.96} \approx 1.1$

Giá trị tới hạn F_α tìm trong bảng phân phối F ứng với mức $\alpha = 0{,}05$ và với các bậc tự do f_1 = 89-1=88; f_2 = 90-1=89 là $F_\alpha = 1.45$, ta thấy $F < F_\alpha$: Chấp nhận E_0, tức là sự khác nhau giữa các phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa.

Khẳng định kết quả học tập giữa hai nhóm: Lớp thực nghiệm và lớp đối chứng bằng cách kiểm định giả thuyết H_0: *Sự khác nhau giữa các điểm trung bình ở hai mẫu thực nghiệm và đối chứng là không có ý nghĩa với phương sai như nhau*.

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$, tra bảng phân phối S-tudent với bậc tự do là: $N_{TN}+N_{ĐC}$ -2 = 90+89-2 = 177 >120 ta có mức tới hạn $t_\alpha = 1.96$.

Tính giá trị kiểm định: $t = \frac{\overline{x_{TN}} - \overline{x_{DC}}}{\sqrt{\frac{(N_{TN}-1)s_{TN}^2 + (N_{DC}-1)s_{DC}^2}{N_{TN}+N_{DC}-2}} \cdot \sqrt{\frac{N_{TN}+N_{DC}}{N_{TN}.N_{DC}}}} \approx 0.75$.

Ta có $t \approx 0.75 < t_\alpha = 1.96$, khẳng định giả thuyết H_0 là đúng chứng tỏ kết quả học tập của hai lớp thực nghiệm và lớp đối chứng là như nhau.

4.3.1.2. Nội dung thực nghiệm sư phạm vòng 1

Tiến hành phân tích kết quả của nhóm thực nghiệm như sau:

Bước 1: Tổ chức dạy thực nghiệm và quan sát HS học tập trên lớp học để đánh giá biểu hiện NLPĐ và LLCCC của HS trong quá trình tiếp thu kiến thức.

Bước 2: Kiểm tra chất lượng HS nhóm thực nghiệm và nhóm đối chứng của các lớp khối 11.

Bước 3: Tổ chức phát phiếu điều tra đối với GV và HS; phỏng vấn GV và HS sau các tiết học thực nghiệm sư phạm.

4.3.1.3. Kết quả thực nghiệm sư phạm vòng 1

Về định tính:

Chúng tôi tiến hành quan sát tất cả các tiết học thực nghiệm sư phạm của lớp thực nghiệm và đối chứng. Thông qua hoạt động quan sát HS, thảo luận với GV dự giờ sau tiết dạy và trao đổi với HS để kiểm tra sự hứng thú, mức độ tiếp thu bài của HS với các bài giảng được thực hiện theo các biện pháp đã đề xuất trong Luận án, chúng tôi nhận thấy: Tiến trình DH được soạn thảo tương đối phù hợp với thực tế DH, HS dần dần làm quen với việc PĐ tri thức, sử dụng kiến thức đã có để giải thích tình huống mới. Không khí lớp học của nhóm lớp thực nghiệm sôi nổi và HS học tích cực, hào hứng hơn so với nhóm lớp đối chứng. Đối với nhóm lớp đối chứng, HS gần như tiếp thu kiến thức thụ động, một số ít các HS học khá có trả lời câu hỏi tuy nhiên chưa đạt yêu cầu đề ra. Ngược lại đối với nhóm lớp thực nghiệm, học HS tích cực hỏi và trả lời ý kiến của chúng tôi đưa ra. Tuy nhiên, khả năng huy động kiến thức một cách phù hợp của HS trong quá trình PĐ giả thuyết và PĐ cách GQVĐ vẫn còn hạn chế. Đôi khi HS vẫn còn mắc một số sai lầm giữa các kiến thức của HH phẳng và HH không gian.

Về định lượng:

Chúng tôi yêu cầu HS nhóm lớp thực nghiệm làm bài kiểm tra trong thời gian 45 phút, đánh giá kiến thức HH không gian tổng hợp của các tiết dạy. Chúng tôi tiến hành chấm, phân tích đánh giá chất lượng của HS nhóm thực nghiệm và nhóm đối chứng, kết quả thu được như sau:

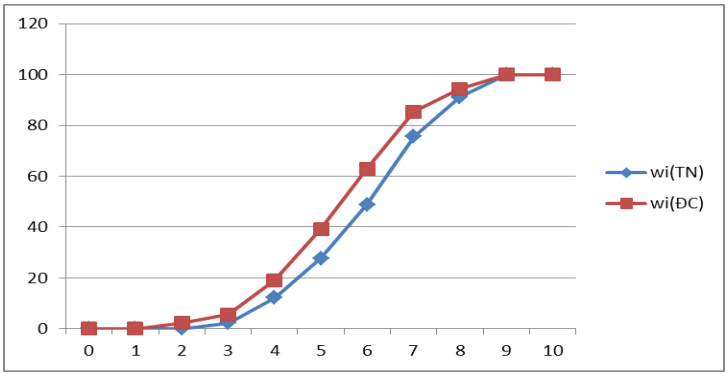
Bảng 4.4. Phân bố điểm của lớp thực nghiệm và đối chứng sau thực nghiệm vòng 1

x_i (điểm)	Tổng số HS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i (*Thực nghiệm*)	90	0	0	0	2	9	14	19	24	14	8	0
n_i (*Đối chứng*)	89	0	0	2	3	12	18	21	20	8	5	0

Từ bảng kết quả, ta có bảng phân phối tần số luỹ tích hội tụ lùi của nhóm thực nghiệm và lớp đối chứng như sau:

Bảng 4.5. Phân bố tần số luỹ tích hội tụ lùi của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 1

x_i (điểm)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_i (*Thực nghiệm*)	0	0	0	2.22	12.22	27.78	48.89	75.56	91.11	100	100
w_i (*Đối chứng*)	0	0	2.25	5.62	19.10	39.33	62.92	85.39	94.38	100	100



Biểu đồ 4.2. Đồ thị biểu diễn đường tần suất luỹ tích hội tụ lùi của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 1

Biểu đồ 4.2 thể hiện đường biểu diễn hội tụ lùi của nhóm lớp thực nghiệm nằm bên dưới của đường biểu thị hội tụ lùi của nhóm lớp đối chứng. Điều này bước đầu cho chúng ta kết luận về kết quả học tập của nhóm lớp thực nghiệm cao hơn nhóm lớp đối chứng.

Để có thể khẳng định về chất lượng của đợt thực nghiệm, chúng tôi tiến hành xử lý số liệu thống kê Toán học, thu được kết quả sau:

Bảng 4.6. Bảng xử lý số liệu thống kế của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 1

Nhóm thực nghiệm (N_{TN}= 90)					Nhóm đối chứng ($N_{ĐC}$ = 89)				
x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2.n_i$	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2.n_i$
0	0	-6.42	41.2164	0	0	0	-5.91	34.9281	0
1	0	-5.42	29.3764	0	1	0	-4.91	24.1081	0
2	0	-4.42	19.5364	0	2	2	-3.91	15.2881	30.576
3	2	-3.42	11.6964	23.393	3	3	-2.91	8.4681	25.404
4	9	-2.42	5.8564	52.708	4	12	-1.91	3.6481	43.777

5	14	-1.42	2.0164	28.230	5	18	-0.91	0.8281	14.906
6	19	- 0.42	0.1764	3.352	6	21	0.09	0.0081	0.170
7	24	0.58	0.3364	8.074	7	20	1.09	1.1881	23.762
8	14	1.58	2.4964	34.950	8	8	2.09	4.3681	34.945
9	8	2.58	6.6564	53.251	9	5	3.09	9.5481	47.741
10	0	3.58	12.8164	0	10	0	4.09	16.7281	0

Kết quả:

Bảng 4.7. Kết quả số liệu thống kê của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 1

Nội dung	Nhóm thực nghiệm	Nhóm đối chứng
Điểm trung bình	$\overline{x}_{TN} \approx 6.42$	$\overline{x}_{DC} \approx 5.91$
Phương sai	$S_{TN}^2 \approx 2.29$	$S_{DC}^2 \approx 2.52$
Độ lệch chuẩn	$S_{TN} \approx 1.51$	$S_{DC} \approx 1.59$

Sử dụng phép thử t-student để xem xét tính hiệu quả của thực nghiệm sư phạm, ta có kết quả $t = \sqrt{\frac{\overline{x}}{S_{TN}}} = \sqrt{\frac{6.42}{1.51}} \approx 2.06$, tra bảng phân phối t-student, bậc tự do f_1=90, với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$ ta được $t_\alpha = 1.67$

Như vậy t = 2.06 > 1.67 = t_α .Thực nghiệm có kết quả rõ rệt.

Tiến hành kiểm định phương sai của nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng với giả thuyết E_0: *Sự khác nhau giữa các phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa.*

Đại lượng kiểm định: $F = \frac{S_{DC}^2}{S_{TN}^2} = \frac{2.52}{2.29} \approx 1.1$

Giá trị tới hạn F_α tìm trong bảng phân phối F ứng với mức $\alpha = 0{,}05$ và với các bậc tự do f_1 = 89-1=88; f_2 = 90-1=89 là $F_\alpha = 1.45$. Vậy, $F < F_\alpha$: Chấp nhận E_0, tức là sự khác nhau giữa phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa.

Để so sánh kết quả của thực nghiệm, chúng ta kiểm định giả thuyết H_0: "Sự *khác nhau giữa các điểm trung bình ở hai mẫu là không có ý nghĩa với phương sai như nhau*". Với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$, tra bảng phân phối Student với bậc tự do là $N_{TN} + N_{ĐC}$ -2 = 90+89-2 = 177 > 120 ta có mức tới hạn $t_\alpha = 1.96$.

Tính giá trị kiểm định: $t = \dfrac{\overline{x_{TN}} - \overline{x_{DC}}}{\sqrt{\dfrac{(N_{TN}-1)s_{TN}^2 + (N_{DC}-1)s_{DC}^2}{N_{TN}+N_{DC}-2}} \cdot \sqrt{\dfrac{N_{TN}+N_{DC}}{N_{TN}.N_{DC}}}} \approx 2.35$

ta có $t \approx 2.35 > t_{\alpha} = 1.96$ khẳng định giả thuyết H_0 bị bác bỏ, chứng tỏ sự khác nhau giữa các điểm trung bình ở hai mẫu là có ý nghĩa. Kết quả kiểm định cho thấy kết quả học tập của nhóm lớp thực nghiệm cao hơn nhóm lớp đối chứng.

Như vậy, có thể kết luận về thực nghiệm sư phạm vòng 1 cho thấy phương pháp DH mới đã có những kết quả ban đầu tích cực, HS đã phát huy được NLPĐ trong học HH; thực nghiệm sư phạm cho thấy kết quả của HS nhóm lớp thực nghiệm cao hơn nhóm lớp đối chứng, điều này minh chứng các biện pháp mà Luận án đưa ra bước đầu có tính khả thi khi vận dụng vào quá trình DH tuy nhiên vẫn còn một số vấn đề cần sửa chữa để tiếp tục thực nghiệm sư phạm vòng 2.

4.3.2. Thực nghiệm sư phạm vòng 2 (Năm học 2014 - 2015)

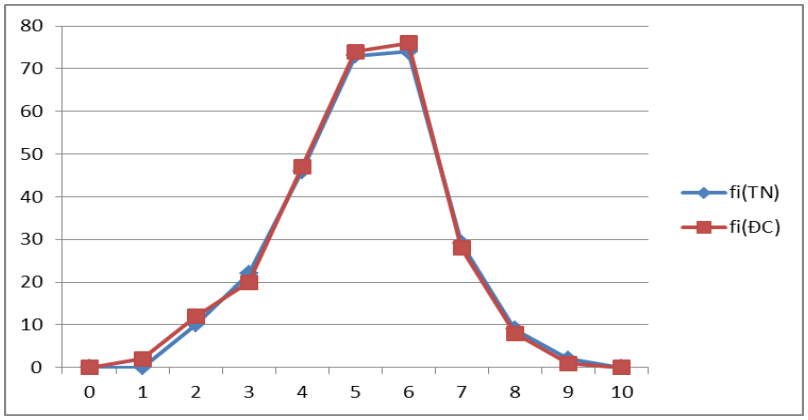
4.3.2.1 Phân tích chất lượng HS trước khi tiến hành thực nghiệm

Để tiến hành chọn mẫu thực nghiệm chúng tôi đã tiến hành cho HS làm bài kiểm tra chất lượng và phân tích kết quả kiểm tra, chúng tôi chọn được 533 HS các lớp của khối 12 (Có 265 HS thuộc nhóm thực nghiệm và 268 HS thuộc nhóm đối chứng có kết quả học tập tương đương nhau ở của ba trường (Trường THPT Tây Hồ - Hà Nội: ba lớp thực nghiệm; ba lớp đối chứng; Trường THPT Trần Hưng Đạo – Hà Đông- Hà Nội: Hai lớp thực nghiệm; hai lớp lớp đối chứng; Trường THPT Quang Trung – Hà Đông – Hà Nội: Một lớp thực nghiệm; một lớp đối chứng)

Kết quả kiểm tra đầu vào của HS nhóm thực nghiệm và nhóm đối chứng như sau:

Bảng 4.8. Phân bố điểm kiểm tra chất lượng của hai nhóm trước thực nghiệm vòng 2

x_i	Số HS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i(thực nghiệm)	265	0	0	10	22	46	73	74	29	9	2	0
n_i(đối chứng)	268	0	2	12	20	47	74	76	28	8	1	0



Biểu đồ 4.3. Đa giác đồ biểu thị điểm kiểm tra chất lượng của hai nhóm trước thực nghiệm sư phạm vòng 2

Nhìn vào đa giác đồ 4.3 chúng ta thấy đỉnh của hai đa giác đồ gần ngang nhau và độ cao của các cột chất lượng điểm trong biểu đồ là gần giống nhau. Hơn nữa hệ số phân tán của lớp thực nghiệm và lớp đối chứng gần như nhau, điều này chứng tỏ chất lượng của nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là tương đương nhau.

Sử dụng phương pháp thống kê, chúng ta thu được kết quả như sau:

Bảng 4.9. Bảng xử lý số liệu thống kê của hai nhóm trước thực nghiệm vòng 2

Nhóm thực nghiệm (N_{TN}= 265)					Nhóm đối chứng ($N_{ĐC}$ = 268)				
x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2.n_i$	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2.n_i$
0	0	-5.18	26.8324	0	0	0	-5.11	26.1121	0
1	0	-4.18	17.4724	0	1	2	-4.11	16.8921	33.784
2	10	-3.18	10.1124	101.124	2	12	-3.11	9.6721	116.065
3	22	-2.18	4.7524	104.553	3	20	-2.11	4.4521	89.042
4	46	-1.18	1.3924	64.050	4	47	-1.11	1.2321	57.909
5	73	-0.18	0.0324	2.365	5	74	-0.11	0.0121	0.895
6	74	0.82	0.6724	49.758	6	76	0.89	0.7921	60.2
7	29	1.82	3.3124	96.060	7	28	1.89	3.5721	100.019
8	9	2.82	7.9524	71.572	8	8	2.89	8.3521	66.817
9	2	3.82	14.5924	29.185	9	1	3.89	15.1321	15.132
10	0	4.82	23.2324	0	10	0	4.89	23.9121	0

Kết quả:

Bảng 4.10. Kết quả số liệu thống kê của hai nhóm trước thực nghiệm vòng 2

Nội dung	Nhóm thực nghiệm	Nhóm đối chứng
Điểm trung bình	$\overline{x_{TN}} \approx 5.18$	$\overline{x_{DC}} \approx 5.11$
Phương sai	$S_{TN}^2 \approx 1.97$	$S_{DC}^2 \approx 2.02$
Độ lệch chuẩn	$S_{TN} \approx 1.4$	$S_{DC} \approx 1.42$

Tiến hành kiểm định phương sai của nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng với giả thuyết E_0: *Sự khác nhau giữa các phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa.*

Đại lượng kiểm định: $F = \frac{S_{DC}^2}{S_{TN}^2} = \frac{2.02}{1.97} \approx 1.03$

Giá trị tới hạn F_α tìm trong bảng phân phối F ứng với mức $\alpha = 0{,}05$ và với các bậc tự do f_1 = 268-1=267; f_2 = 265-1=264 là $F_\alpha = 1.26$, ta thấy $F < F_\alpha$: Chấp nhận E_0, tức là sự khác nhau giữa các phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa.

Khẳng định kết quả học tập giữa hai nhóm: Lớp thực nghiệm và lớp đối chứng bằng cách kiểm định giả thuyết H_0: *Sự khác nhau giữa các điểm trung bình ở hai mẫu thực nghiệm và đối chứng là không có ý nghĩa với phương sai như nhau.*

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$, tra bảng phân phối S-tudent với bậc tự do là: $N_{TN}+N_{ĐC}$ -2 = 265+268-2 = 531 >120 ta có mức tới hạn $t_\alpha = 1.96$.

Tính giá trị kiểm định: $t = \frac{\overline{x_{TN}} - \overline{x_{DC}}}{\sqrt{\frac{(N_{TN}-1)s_{TN}^2 + (N_{DC}-1)s_{DC}^2}{N_{TN}+N_{DC}-2}} \cdot \sqrt{\frac{N_{TN}+N_{DC}}{N_{TN}.N_{DC}}}} \approx 0.57$.

Ta có $t \approx 0.57 < t_\alpha = 1.96$, khẳng định giả thuyết H_0 là đúng chứng tỏ kết quả học tập của hai lớp thực nghiệm và lớp đối chứng là như nhau.

4.3.2.2. Nội dung thực nghiệm sư phạm vòng 2

Rút kinh nghiệm từ kết quả thực nghiệm sư phạm vòng 1, tác giả điều chỉnh những hạn chế của các biện pháp sao cho đảm bảo tính khả thi hơn. Cũng tiến hành các bước như với thực nghiệm sư phạm vòng 1 trên các nhóm thực nghiệm và đối chứng nhưng ở diện rộng hơn đối với ba trường THPT và số lượng HS nhiều hơn để kiểm định tính khả thi của các biện pháp đề ra.

4.3.2.3. Kết quả thực nghiệm sư phạm vòng 2

Về định tính:

Chúng tôi tiến hành quan sát tất cả các tiết học thực nghiệm sư phạm của lớp thực nghiệm và đối chứng. Thông qua hoạt động quan sát HS, thảo luận với GV dự giờ sau tiết dạy và trao đổi với HS để kiểm tra sự hứng thú, mức độ tiếp thu bài của HS với các bài giảng được thực hiện theo các biện pháp đã đề xuất trong Luận án, chúng tôi nhận thấy: Tiến trình DH được soạn thảo phù hợp với thực tế DH. Các em đã làm quen với việc PĐ bài toán và PĐ cách GQVĐ, biết tự điều chỉnh tri thức đã có để giải thích tình huống mới. Nhóm thực nghiệm học tập tích cực, chủ động và hào hứng hơn so với nhóm lớp đối chứng. Nhóm lớp thực nghiệm, HS tích cực hỏi và trả lời ý kiến do chúng tôi đưa ra, HS tiếp thu tốt, các biểu hiện về NLPĐ được thể hiện rõ nét hơn, khả năng huy động kiến thức để GQVĐ nhanh và phù hợp hơn.

Về định lượng:

Chúng tôi tiến hành cho HS làm bài kiểm tra chất lượng để đánh giá chất lượng học tập của 2 nhóm, kết quả như sau:

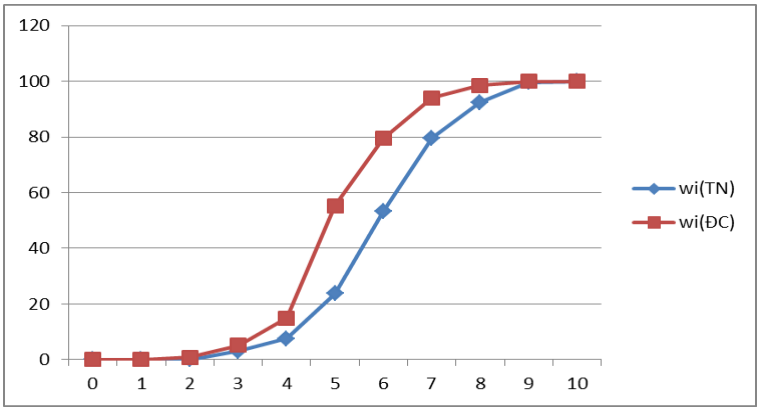
Bảng 4.11. Phân bố điểm của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2

x_i	Tổng số HS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i (*Thực nghiệm*)	265	0	0	0	8	12	43	78	70	34	19	1
n_i (*Đối chứng*)	268	0	0	2	12	26	108	65	39	12	4	0

Từ bảng kết quả, ta có bảng phân phối tần số luỹ tích hội tụ lùi của nhóm thực nghiệm và lớp đối chứng như sau:

Bảng 4.12. Phân bố tần số luỹ tích hội tụ lùi của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_i (*Thực nghiệm*)	0	0	0	3.02	7.55	23.77	53.21	79.62	92.45	99.62	100
w_i (*Đối chứng*)	0	0	0.75	5.22	14.93	55.22	79.48	94.03	98.51	100	100



Biểu đồ 4.4. Đồ thị biểu diễn đường tần suất luỹ tích hội tụ lùi của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2

Biểu đồ 4.4 thể hiện đường biểu diễn hội tụ lùi của nhóm lớp thực nghiệm nằm ở dưới của đường biểu thị hội tụ lùi của lớp đối chứng. Như vậy, kết quả kiểm tra của nhóm các lớp thực nghiệm cao hơn kết quả kiểm tra của nhóm các lớp đối chứng.

Để có thể khẳng định về chất lượng của đợt thực nghiệm vòng 2, chúng tôi tiến hành xử lý số liệu thống kê Toán học, thu được kết quả sau:

Bảng 4.13. Bảng xử lý số liệu của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2

Nhóm thực nghiệm (N_{TN}= 265)					Nhóm đối chứng ($N_{ĐC}$ = 268)				
x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2.n_i$	x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2.n_i$
0	0	-6.41	41.0881	0	0	0	-5.52	30.4707	0
1	0	-5.41	29.2681	0	1	0	-4.52	20.4304	0
2	0	-4.41	19.4481	0	2	2	-3.52	12.3904	24.781
3	8	-3.41	11.6281	93.025	3	12	-2.52	6.3504	76.205
4	12	-2.41	5.8081	69.697	4	26	-1.52	2.3104	60.07
5	43	-1.41	1.9881	85.488	5	108	-0.52	0.2704	29.203
6	78	-0.41	0.1681	13.112	6	65	0.48	0.2304	14.976
7	70	0.59	0.3481	24.367	7	39	1.48	2.1904	85.426
8	34	1.59	2.5281	85.955	8	12	2.48	6.1504	73.805
9	19	2.59	6.7081	127.454	9	4	3.48	12.1104	48.442
10	1	3.59	12.8881	12.888	10	0	4.48	20.0704	0

Kết quả:

Bảng 4.14. Kết quả số liệu thống kê của hai nhóm sau thực nghiệm vòng 2

Nội dung	Nhóm thực nghiệm	Nhóm đối chứng
Điểm trung bình	$\overline{x_{TN}} \approx 6.41$	$\overline{x_{DC}} \approx 5.52$
Phương sai	$S_{TN}^2 \approx 1.94$	$S_{DC}^2 \approx 1.55$
Độ lệch chuẩn	$S_{TN} \approx 1.39$	$S_{DC} \approx 1.25$

Sử dụng phép thử t-student để xét tính hiệu quả của thực nghiệm sư phạm, ta có kết quả $t = \sqrt{\frac{\overline{x_{TN}}}{S_{TN}}} = \sqrt{\frac{6.41}{1.39}} \approx 2.15$, tra bảng phân phối t-student, bậc tự do f_1 = 265, với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$ ta được $t_\alpha = 1.96$.

Như vậy t = 2.15 > 1.96 = t_α. Thực nghiệm có kết quả rõ rệt.

Tiến hành kiểm định phương sai của nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng với giả thuyết E_0: *Sự khác nhau giữa các phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa.*

Đại lượng kiểm định: $F = \frac{S_{TN}^2}{S_{DC}^2} = \frac{1.94}{1.55} \approx 1.25$

Giá trị tới hạn F_α tìm trong bảng phân phối F ứng với mức $\alpha = 0{,}05$ và với các bậc tự do f_1 = 265-1-264; f_2 = 268-1=267 là 1.26 ta thấy $F < F_\alpha$: Chấp nhận E_0, tức là sự khác nhau giữa phương sai ở nhóm lớp thực nghiệm và nhóm lớp đối chứng là không có ý nghĩa.

Khẳng định chất lượng hai nhóm lớp thực nghiệm và đối chứng bằng cách kiểm định giả thuyết H_0: "*Sự khác nhau giữa các điểm trung bình ở hai mẫu thực nghiệm và đối chứng là không có ý nghĩa với phương sai như nhau*".

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$, tra bảng phân phối Student với bậc tự do là $N_{TN}+N_{ĐC}-2$ =265+268-2=531 >120 ta có mức tới hạn $t_\alpha = 1.96$.

Tính giá trị kiểm định:

$$t = \frac{\overline{x_{TN}} - \overline{x_{DC}}}{\sqrt{\frac{(N_{TN}-1)s_{TN}^2 + (N_{DC}-1)s_{DC}^2}{N_{TN}+N_{DC}-2}} \cdot \sqrt{\frac{N_{TN}+N_{DC}}{N_{TN}.N_{DC}}}} \approx 7.75 > 1.96.$$

Bác bỏ giả thuyết H_0, chứng tỏ kết quả học tập của nhóm thực nghiệm cao hơn nhóm đối chứng.

4.4. Phân tích kết quả kiểm chứng qua việc điều tra giáo viên và học sinh về quá trình thực nghiệm sư phạm

Khi bắt đầu thực nghiệm, chúng tôi chú ý đến câu trả lời cũng như cách giải quyết các tình huống của các em, có thể nhận thấy rằng, HS lớp đối chứng và ngay cả lớp thực nghiệm cũng xảy ra tình trạng:

HS chưa được luyện tập các hoạt động PĐ nên gặp rất nhiều khó khăn trong việc suy đoán giả thuyết cũng như suy đoán cách GQVĐ.

Khi xem xét một bài toán, HS chưa biết mối liên hệ của bài toán này với các bài toán khác đã học.

- Khi giải toán HS chưa có thói quen duyệt lại các tiền đúng trong mỗi bước lập luận cũng như chưa có thói quen tìm các căn cứ cho mỗi bước lập luận;

Một số HS chưa có khả năng sử dụng nhuần nhuyễn các hoạt động trí tuệ như phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa ... trong quá trình PĐ và GQVĐ.

Khi giải các bài toán HH, HS chưa chú trọng phân biệt sự giống nhau và khác nhau giữa các tri thức của HH phẳng với các tri thức của HH không gian, cho nên nhiều khi dẫn đến sai lầm và ngộ nhận.

Với GV cũng rất ngại dạy việc bồi dưỡng PĐ và LLCCC theo các biện pháp mà Luận án đã đề xuất vì nhiều lí do khác nhau (phân phối chương trình, đánh giá hiện nay, thời gian, ...), đặc biệt do áp lực thi cử. Do đó, họ phải bỏ qua việc dạy cho HS tìm tòi; dự đoán; liên hệ giữa kiến thức này với kiến thức khác; GV sẵn sàng làm thay cho HS, chủ yếu bồi dưỡng các dạng giải Toán và HS vận dụng một cách máy móc để giải. Vì vậy, bài học không gây hứng thú học tập cho người học, HS học HH một cách thụ động, cứng nhắc.

Sau khi nghiên cứu kĩ về lý luận và thực tiễn của các biện pháp sư phạm được xây dựng ở Chương 3 vào quá trình DH và dự giờ các tiết thực nghiệm; các GV dự giờ đều có ý kiến rằng: Không có gì trở ngại trong việc vận dụng các biện pháp này vào quá trình DH ở các trường THPT, những gợi ý về cách đặt câu hỏi và cách dẫn dắt để HS PĐ và LLCCC là hợp lí, vừa sức đối với người học; vừa kích thích được tính tích cực, độc lập, sáng tạo của người học vừa ngăn chặn được những khó khăn, sai lầm có thể nảy sinh do hiểu chưa sâu kiến thức, nhìn nhận bài toán thiếu toàn diện. Mặt khác, các biện pháp bồi dưỡng cho HS khả năng vận dụng linh hoạt, tính tích cực, chủ động, độc lập, NL khám phá và khả năng suy đoán để giải quyết tình huống mới.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Mục đích của thực nghiệm sư phạm là kiểm chứng tính khả thi và tính hiệu quả của các hoạt động bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC đã được xây dựng trong chương 3. Qua đợt DH thực nghiệm, bước đầu chúng tôi đưa ra một số kết luận như sau:

+ Sử dụng các hoạt động bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT bước đầu có hiệu quả.

+ Các hoạt động bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT đã phát huy được tính tích cực, chủ động và sáng tạo trong học tập. Khi phân tích định tính, đặc biệt quan sát những biểu hiện về NLPĐ và LLCCC của HS trong quá trình thực nghiệm, chúng tôi thấy rằng bài dạy thực nghiệm đã thu hút HS tích cực suy nghĩ nhiều hơn, các em khám phá kiến thức trong cách tiếp cận vấn đề, cách GQVĐ, cách vận dụng những kết quả tìm được.

+ Việc bồi dưỡng cho HS NLPĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT đã tạo điều kiện cho HS được học tập trong hoạt động và bằng hoạt động. Bằng phương pháp tăng cường khả năng vận dụng dưới sự hướng dẫn của GV, sự trợ giúp của các bạn trong nhóm, HS từng bước lĩnh hội tri thức, rèn luyện kỹ năng, khẳng định bản thân, hợp tác hiệu quả.

+ Tuy nhiên trong quá trình DH thực nghiệm, chúng tôi nhận thấy có các vấn đề cần quan tâm như: NLPĐ và LLCCC của HS trên thực tế nói chung còn hạn chế và mức độ PĐ cũng không đồng đều giữa các em; một số hoạt động bồi dưỡng NLPĐ khi vận dụng có thể sẽ trở nên không khả thi, không hiệu quả hoặc hình thức hóa. Thực tế đó xuất phát từ nhiều lý do: lớp học quá đông, thời lượng dành cho nội dung môn học quá ít, nhà trường thiếu cơ sở vật chất phục vụ DH, vẫn còn một tỷ lệ lớn HS thiếu ý thức và kỹ năng học tập, khả năng trình bày lập luận của HS còn hạn chế... Nhưng khó khăn lớn nhất vẫn là nội dung và phương pháp bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC nên áp dụng như thế nào cho phù hợp với từng bài học và điều kiện thực tiễn DH ở mỗi nhà trường. Điều đó đòi hỏi phần nhiều ở kỹ năng tổ chức DH theo quan điểm bồi dưỡng NLPĐ và LLCCC của GV cũng như ý thức và NL tự học của HS, những yếu tố quyết định nâng cao tính khả thi và hiệu quả của các hoạt động bồi dưỡng đã được xây dựng trong Luận án.

KẾT LUẬN

Luận án làm rõ các biểu hiện cơ bản của NLPĐ trong DH HH ở trường THPT bao gồm: NLPĐ phát hiện vấn đề và NLPĐ cách GQVĐ nhờ sử dụng mối quan hệ giữa cái chung và cái riêng; các hoạt động trí tuệ; SL tương tự; SL quy nạp; ngoại suy và biểu diễn Toán học.

Luận án xác định được các biểu hiện cơ bản của LLCCC trong DH HH ở trường THPT bao gồm: Khả năng phân tích cấu trúc logic của bài toán; khả năng tìm thấy đường lối giải toán nhờ sử dụng sơ đồ "phân tích đi xuống"; khả năng xác định căn cứ của mỗi bước lập luận; khả năng kiểm tra, đánh giá lời giải; khả năng tìm được phản ví dụ để bác bỏ mệnh đề.

Luận án làm rõ phạm vi sử dụng hoạt động PĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT được thể hiện qua các tình huống DH điển hình: DH khái niệm, DH định lý và DH bài tập trong chương trình môn Toán ở trường THPT: DH HH vectơ lớp 10; DH HH không gian lớp 11 và lớp 12.

Luận án xác định được cơ sở khoa học để xác định các hoạt động thành phần của cấu trúc hoạt động PĐ và LLCCC trong DH HH ở trường THPT là các quy luật của tư duy biện chứng; các loại "SL có lý"; tư duy tiền logic; khả năng liên tưởng và di chuyển liên tưởng; các tiên đề HH; các kiến thức logic chẳng hạn như các QTSL ở dạng ẩn tàng; các căn cứ của lập luận.

Luận án đề xuất quy trình DH nhằm giúp HS PĐ bao gồm các bước cơ bản: Quan sát các đối tượng; Sử dụng các hoạt động trí tuệ như: Phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa; các SL: tương tự; quy nạp; ngoại suy và biểu diễn Toán học để phát hiện và PĐ đối tượng mới hay PĐ cách GQVĐ của bài toán mới; Sử dụng SL Toán học để khẳng định hoặc bác bỏ PĐ.

Mặt khác, Luận án cũng đề xuất quy trình DH nhằm giúp HS LLCCC bao gồm các bước cơ bản: Người học phân tích cấu trúc logic của bài toán; GV tổ chức cho HS phân tích cách giải của bài toán; HS đánh giá căn cứ của mỗi bước lập luận trong cách GQVĐ của bài toán hoặc xác định các tiền đề đúng được sử dụng trong quá trình GQVĐ; HS trình bày lời giải của bài toán.

Tác giả đã tiến hành thực nghiệm sư phạm hai vòng tại bốn trường: THPT Hà Đông, THPT Trần Hưng Đạo, THPT Quang Trung; THPT Tây Hồ của thành phố Hà Nội. Các kết quả của thực nghiệm sư phạm đã chứng tỏ tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp đã đề xuất.

Luận án có thể được sử dụng như tài liệu tham khảo cho các đồng nghiệp, sinh viên các trường đại học sư phạm và GV giảng dạy môn Toán ở các trường THPT.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ ĐÃ CÔNG BỐ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN ĐỀ TÀI LUẬN ÁN

I. Các bài báo đã công bố

1. Vũ Đình Chinh (2013), *Bồi dưỡng khả năng phán đoán cho học sinh lớp 11 thông qua phép suy luận tương tự trong dạy học hình học không gian*, Tạp chí Khoa học số 58, trang 49-56, ĐHSP Hà Nội.
2. Vũ Đình Chinh (2014), *Rèn luyện hoạt động phán đoán cho học sinh THPT nhờ sử dụng quan hệ biện chứng giữa cái chung và cái riêng trong dạy học hình học không gian*, Tạp chí Khoa học số 59, trang 200-209, ĐHSP Hà Nội.
3. Vũ Đình Chinh (2015), *Rèn luyện hoạt động phán đoán cho HS thông qua việc sử dụng suy luận quy nạp trong dạy học hình học lớp 10*, Tạp chí Khoa học giáo dục số 119 tháng 8/2015, trang 42-44 và trang 48, Hà Nội.
4. Vũ Đình Chinh (2015), *Rèn luyện hoạt động phán đoán cho học sinh nhờ sử dụng tương tự và khái quát hóa trong dạy học hình học lớp 11*, Tạp chí khoa học số 60, trang 97-106, ĐHSP Hà Nội.

II. Bài báo tại Hội nghị Khoa học quốc gia

Vũ Đình Chinh (2014), *Rèn luyện hoạt động phán đoán cho HS THPT nhờ sử dụng phép liên tưởng trong dạy học hình học không gian*, Kỷ yếu Hội thảo Khoa học quốc gia "Nghiên cứu giáo dục Toán học theo hướng phát triển năng lực người học, giai đoạn 2014 -20120", NXB ĐHSP, Hải Phòng tháng 4/2014.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Trần Đình Châu (1996), *Xây dựng hệ thống bài tập số học nhằm bồi dưỡng một số yếu tố năng lực Toán học cho học sinh khá giỏi đầu cấp THCS*, Luận án PTS Khoa học Sư phạm - Tâm lý, Viện KHGD, Hà Nội.
2. Văn Như Cương (chủ biên), Hoàng Ngọc Hưng, Đỗ Mạnh Hùng, Hoàng Trọng Thái (2009), *Hình học sơ cấp và thực hành giải toán*, NXB Đại học Sư phạm, HN.
3. Nguyễn Văn Cường (2006), *Đổi mới phương pháp dạy học trung học phổ thông*, Dự án phát triển THPT, Bộ GD & ĐT.
4. Lê Ngọc Dung (2014), *Một số phương thức hỗ trợ học sinh dự đoán, phát hiện quy luật Toán học trong dạy học toán ở phổ thông*, Luận văn Thạc sĩ Giáo dục học, ĐH Sư phạm Huế.
5. Vũ Cao Đàm (1999), *Phương pháp luận nghiên cứu khoa học*, NXB Khoa học và Kỹ thuật.
6. Nguyễn Hữu Điển (2001), Những phương pháp điển hình trong giải Toán phổ thông, NXB Giáo dục, Hà Nội.
7. Nguyễn Như Hải (2014), *Logic học đại cương*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
8. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên), Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên), Nguyễn Văn Đoành, Trần Đức Huyên (2007), *Hình học 10 cơ bản,* NXB Giáo dục, Hà Nội.
9. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên), Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên),Khu Quốc Anh, Nguyễn Hà Thanh, Phan Văn Viện (2007), *Hình học 11 cơ bản,* NXB Giáo dục, Hà Nội.
10. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên), Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên), Khu Quốc Anh, Trần Đức Huyên (2007), *Hình học 12 cơ bản*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
11. Nguyễn Đình Hùng (1996), *Bồi dưỡng tư duy logic cho HS trường trung học cơ sở Việt Nam thông qua hệ thống câu hỏi và bài tập đại số lớp 7*, Luận án PTS Khoa học Sư phạm - Tâm lý, ĐHSP Hà Nội.
12. Trần Khánh Hưng (1996), *Giáo trình phương pháp dạy học Toán*, ĐH Huế.
13. Hoàng Phê, chủ biên (2006), *Từ điển Tiếng Việt*, NXB Đà Nẵng.

14. Nguyễn Đăng Minh Phúc (2010), *Phát triển SL ngoại suy thông qua các mô hình toán thao tác động điện tử,* Tạp chí Khoa học tập 39, số 2A, Đại học Vinh.
15. Polya (Hà Sĩ Hồ, Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương, Hồ Thuần dịch) (2010), *Toán học và những SL có lý*, NXB Giáo dục Việt Nam.
16. Nguyễn Bá Kim (chủ biên), Vũ Dương Thụy (2002), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Giáo dục Việt Nam.
17. Nguyễn Bá Kim (2015), *Phương pháp dạy học môn Toán,* NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
18. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (chủ biên), Phạm Khắc Ban, Tạ Mân (2006), *Hình học 10 nâng cao*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
19. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (chủ biên), Phạm Khắc Ban, Tạ Mân (2006), *Hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
20. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (chủ biên), Phạm Khắc Ban, Tạ Mân (2009), *Hình học 12 nâng cao*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
21. Nguyễn Phú Lộc (2014), *Giáo trình hoạt động dạy và học môn Toán*, NXB Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.
22. Nguyễn Văn Lộc (1992), *Hình thành kỹ năng lập luận có căn cứ cho học sinh đầu cấp trường phổ thông cơ sở Việt Nam thông qua dạy hình học*, Luận án Tiến sĩ Khoa học Giáo dục, Viện Khoa học giáo dục.
23. Phan Trọng Ngọ (2011), *Cơ sở triết học và tâm lý học của đổi mới phương pháp dạy học trong trường phổ thông*, NXB Sư phạm, Hà Nội.
24. Đào Tam (2004), *Phương pháp dạy học hình học ở trường trung học phổ thông,* NXB Đại học sư phạm, Hà Nội
25. Đào Tam (Chủ biên), Lê Hiển Dương (2009), *Tiếp cận các phương pháp dạy học không truyền thống trong dạy học Toán ở trường đại học và trường phổ thông, NXB Đại học sư phạm*, Hà Nội.
26. Đào Tam (Chủ biên), Trần Trung (2010), *Tổ chức hoạt động nhận thức trong dạy học môn Toán ở trường THPT,* NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
27. Đào Tam (2012), *Giáo trình hình học sơ cấp,* NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội

28. Nguyễn Văn Thuận (2004), *Góp phần phát triển năng lực tư duy lôgic và sử dụng chính xác ngôn ngữ Toán học cho học sinh đầu cấp Trung học phổ thông trong dạy học Đại số*, Luận án Tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Vinh.
29. Chu Cẩm Thơ (2014), *Phát triển tư duy thông qua dạy học môn toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
30. Nguyễn Cảnh Toàn (1997), *Phương pháp luận duy vật biện chứng với việc học, dạy và nghiên cứu toán*, Tập I, II, NXB Đại học quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
31. Nguyễn Cảnh Toàn (2004), *Khơi dậy tiềm năng sáng tạo*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
32. Đào Văn Trung (2001), *Làm thế nào để học tốt toán phổ thông*, NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội.
33. Nguyễn Anh Tuấn (2012), *Giáo trình logic toán và lịch sử Toán học*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
34. Nguyễn Thị Thanh Vân (2015), *Dạy học hình học cao cấp ở trường đại học cho sinh viên sư phạm toán theo hướng chuẩn bị năng lực dạy học hình học ở trường phổ thông*, Luận án Tiến sĩ Khoa học Giáo dục, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam.

Tiếng Anh

35. Aliseda, A. (2006), *Abductive reasoning logical investigations into discovery and explanation*, Springer, Netherland.
36. Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O., Paola, D., & Gallino, G. (1998), "Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry", In *PME CONFERENCE*, (2), pp. 24-31, Stellenbosch, South Africa.
37. Baccaglini Frank, A. (2010), *Conjecturing in Dynamic Geometry: A model for Conjecture –Generation through Maintaining Dragging*, Ph.D thesis, New Hampshire University, Concord, USA.
38. Bergqvist, T. (2005), "How students verify conjectures: Teachers' expectations", *Journal of Mathematics Teacher Education*, (*8*(2)), pp. 171-191, USA.

39. Canadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007), "The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice", *Journal of Teaching and Learning*, (*5*(1)), pp 55-72, University of Windsor, Canada.
40. Canadas, M.C., & Castro, E. (2005), *Inductive reasoning in the justification of the result of adding two even numbers*, Paper presented at the CERME 4, Sant Feliu de Guixols, Girona, Spain.
41. Feeney, A.& Heit, E. (2007), *Inductive Reasoning experimental, Developmental, and Computational Approaches*, Cambrigde University Press, UK.
42. Ferrando (2005), *Abductive processes in conjecturing and proving*, Ph.D thesis, Purdue University, USA.
43. Fischbein, H. (1987), *Intuition in science and mathematics: An educational approach*, (5), Springer Science & Business Media, New York, USA.
44. Furinghetti, F. & Paola, D (2003), "To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment*:* A case study", In N. A. Pateman, B. J. Doherty, & J. Zilliox (Eds), *Proceedings of the Twenty-seventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (2), pp 397-404, Honolulu University, USA.
45. Gentner, D., Beranek, B. & Inc, I. (1983), *"*Structure –mapping: A theoretical framework for analogy", *Cognitive science*, (7 (2)), pp. 155-170, USA.
46. George Polya, Leon Bowden (1977), *Mathematical methods in science*, E-book, the Mathematical association of America, USA.
47. Harel, G & Sowder, L. (1998), "Students' proof schemes: Results from exploratory studies", *Research in collegiate mathematics education III (CBMS: Issues in Mathematics education)*, (7), pp.234-283, Providence: American Mathematical society, USA.
48. John M.Gillis (2005), *An investigation of student conjectures in static and dynamic geometry environments*, Ph.D thesis, Auburn University, USA.
49. Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001), "The strands of Mathematical proficiency", *Adding it up: Helping children learn Mathematics*, pp.115-118, USA.

50. Lin, F. L. (2006), "Designing mathematics conjecturing activities to foster thinking and constructing actively", *Progress report of the APEC project: Collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)–Lesson study focusing on mathematical thinking, CRICED and University of Tsukuba*, pp. 65-74, Japan.

51. Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2011), "Principles of task design for conjecturing and proving", *In Proof and proving in mathematics education*, (15), pp. 305-325, Springer Netherlands.

52. Lin, F.L. & Wu, C.J. (2007), "Uses of examples in geometric conjecturing", *Proceedings of 31st Conference of the international group for the psychology of Mathematics education*, (3), pp.209 -216, Seoul, Korea.

53. Lin, P.J. & Tsai, W.H. (2013), "A task design for conjecturing in Primary classrom contexts", *Proceedings of the 22nd of international congress of Mathematics instruction study*, pp. 249-258, UK.

54. Lui, A. (2012), *White paper teaching in the zone*, Children's Progress, Northern Illinois University, USA.

55. Magnani, L. (2001), *Abduction, Reason and science, Processes of Discovery and Explanation*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, NewYork, USA.

56. Mason, J. (2002), "Generalisation and algebra: Exploiting children's powers", In L. Haggerty (Ed.*), Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice,* pp. 105-120, Routledge Falmer Reader and in Education Policy and Politics, London, England.

57. Nassar, O. (2010), *Exploring Grade Eight student's Development of geometric reasoning in a problem solving situation using dynamics geometry solfware*, M.A. thesis, Lebanese American University, Beirut, Lebanon.

58. National council of teachers of Mathematics high school curriculum project (2009), *Focus in high school Mathematics Reasoning and sense making*, eBook, USA.

59. Nickerson, R. (2011), *Mathematical reasoning: Patterns, problems, conjectures, and proofs*, Journal for Research in Mathematics Education, Taylor & Francis Group, USA.

60. Pease, A. & Aberdein, A. (2011), "Five theories of reasoning: Interconnections and applications to Mathematics", *Logical and logical philosophy*, (20), pp. 7-57, Nicolas Copernicus University, Poland.

61. Rivera, F.D & Becker, J.R. (2007), "Abduction on pattern generalization", In *Proceedings of the 31 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (4), pp. 97-104, Seoul, Korea.

62. Tadao Nakahara (2007), *Development of mathematical thinking through representation: Utilizing representational systems*, Progress report of the APEC project "Collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II) – Lesson study focusing on mathematical communication", Specialist Session, December 2007, University of Tsukuba, Japan.

63. Thagard, P. (2007), "Abductive inference: From philosophical analysis to neural mechanisms", *Inductive reasoning experimental, developmental and computational approaches*, pp.226 -247, Cambridge University Press, UK.

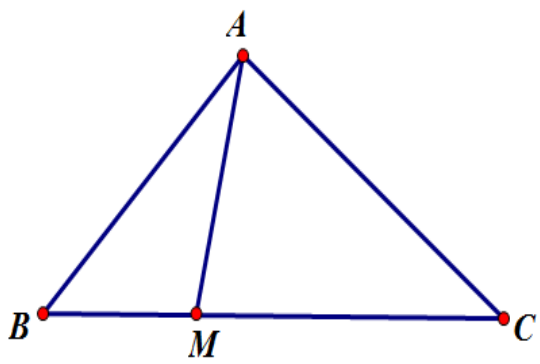
Tiếng Nga

64. In -M Kolyagin (1980), *Phương pháp dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Giáo dục Matxcơva, Nga.

PHỤ LỤC 1
PHIẾU HỌC TẬP SỐ 1

Cho tam giác *ABC*, *M* là trung điểm của *BC*, ta có $AM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$ (1)

a. Nếu M ở trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, hãy dự đoán về mối liên hệ giữa AM^2 với các cạnh của tam giác *ABC*. Hãy trình bày lý do nào mà em dự đoán được mối liên hệ như thế.



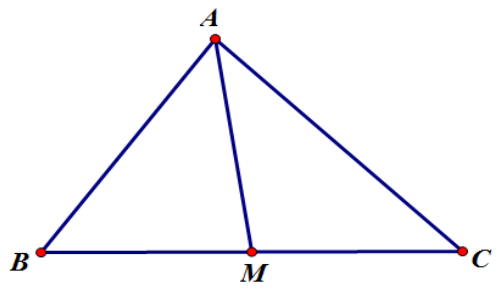
b. Hãy thuyết phục với cả lớp rằng dự đoán trên là đúng bằng cách CM bởi SL toán học.

c. Hãy cho biết sự tương tự giữa công thức (1) và công thức mà em vừa làm sáng tỏ ở câu b.

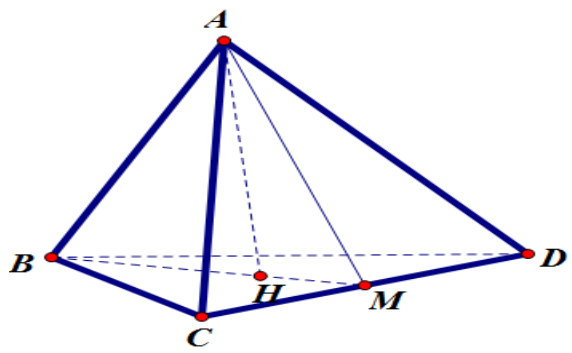
d. Nếu M ở trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BC}$. $0 < k < 1$. Hãy dự đoán về mối liên hệ giữa AM^2 với $AB^2; AC^2; BC^2$. Trình bày chi tiết cách nào mà em đã dự đoán được mối liên hệ đó. Từ đó hãy thuyết phục với cả lớp rằng dự đoán trên là đúng bằng cách CM bởi SL toán học.

PHIẾU HỌC TẬP SỐ 2

(1) Cho tam giác *ABC*, gọi *M* là trung điểm của *BC*.



(2) Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *H* là trọng tâm của tam giác *ABC*.



a. Hãy cho biết những điều tương tự với nhau giữa hai đối tượng (1) và (2).

b. Từ đó em hãy chuyển bài toán trong HH phẳng: "Cho tam giác *ABC*, *M* là trung điểm của *BC*, ta có $AM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$" về bài toán trong HH không gian.

c. Hãy thuyết phục với cả lớp rằng dự đoán ở câu *b* là đúng bằng cách CM bởi SL toán học.

d. Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *M* là điểm nằm trên *CD* và *H* nằm trên *BM* sao cho:

$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$. Chứng minh rằng:

$$AH^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{9}AC^2 + \frac{2}{9}AD^2 - \frac{2}{27}BC^2 - \frac{4}{27}BD^2 - \frac{2}{81}CD^2.$$

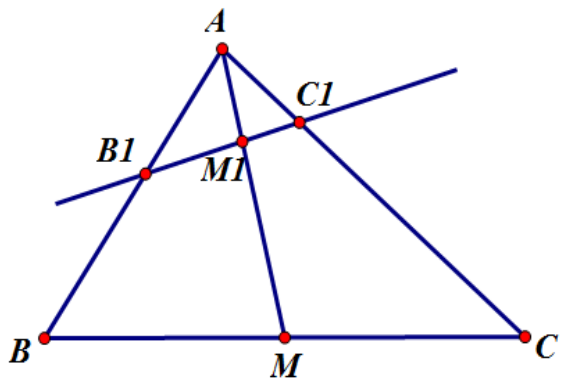
e. Dựa vào kết quả của *c* và *d* em hãy dự đoán công thức cho trường hợp khái quát sau đây:

"Cho tứ diện *ABCD*, Gọi *M* là điểm nằm trên cạnh CD sao cho $\overrightarrow{CM} = k.\overrightarrow{CD}$ (0<k<1) , H là điểm nằm trên cạnh BM sao cho $\overrightarrow{BH} = l.\overrightarrow{BM}$ (0<l<1). Hãy dự đoán công thức tính *AH*".

f. Em hãy khẳng định dự đoán ở câu *e* là đúng bằng cách sử dụng CM Toán học để làm sáng tỏ vấn đề.

PHIẾU HỌC TẬP SỐ 3

Cho tam giác *ABC*, gọi *M* là trung điểm của *BC*. Một đường thẳng *d* cắt các cạnh *AB*; *AC* và cắt đoạn *AM* lần lượt tại các điểm B_1, C_1, M_1.



a. Hãy dự đoán mối liên hệ giữa $\frac{AB}{AB_1}; \frac{AC}{AC_1}$ và $\frac{AM}{AM_1}$. Em hãy trình bày chi tiết bằng cách nào mà em dự đoán được mối liên hệ đó.

b. Em hãy thuyết phục với cả lớp rằng dự đoán trên là đúng bằng cách CM bởi SL toán học.

PHIẾU HỌC TẬP SỐ 4

Cho tam giác *ABC*, gọi *M* là một điểm nằm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Một đường thẳng *d* cắt các cạnh *AB*; *AC* và cắt đoạn *AM* lần lượt tại các điểm B_1, C_1, M_1.

a. Hãy dự đoán mối liên hệ giữa $\frac{AB}{AB_1}; \frac{AC}{AC_1}$ và $\frac{AM}{AM_1}$. Em hãy trình bày chi tiết cách nào mà dự đoán được mối liên hệ đó.

b. Em hãy thuyết phục với cả lớp rằng dự đoán trên là đúng bằng cách CM bởi SL toán học.

c. Em hãy dự đoán mối liên hệ trên cho trường hợp tổng quát (tức là M nằm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BC}, 0 < k < 1$).

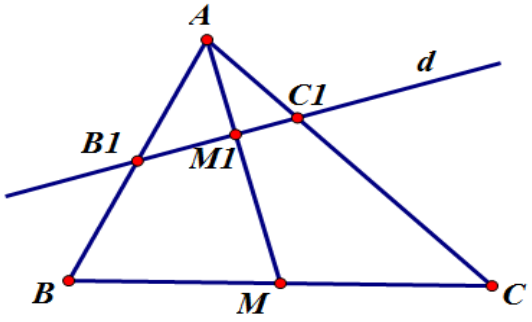
d. Hãy thuyết phục với cả lớp rằng dự đoán trên là đúng bằng cách chứng minh bằng SL toán học.

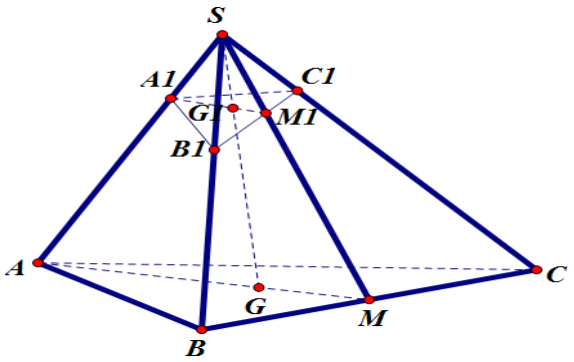
PHIẾU HỌC TẬP SỐ 5

a. Hãy cho biết những điều tương tự giữa hai đối tượng sau đây:

Cho tam giác *ABC*, gọi *M* là trung điểm của *BC*. Một đường thẳng *d* cắt các cạnh *AB*; *AC* và cắt đoạn *AM* lần lượt tại các điểm B_1, C_1, M_1

Cho tứ diện *SABC*. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*. Một mặt phẳng (α) cắt cạnh *SA*, *SB*, *SC* và cắt đoạn *SG* lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1, G_1





b. Từ đó em hãy chuyển bài toán trong HH phẳng: "Cho tam giác *ABC*, gọi *M* là trung điểm của *BC*. Một đường thẳng *d* cắt các cạnh *AB*; *AC* và cắt đoạn *AM* lần lượt tại các điểm B_1, C_1, M_1. Ta có: $\frac{AM}{AM_1} = \frac{1}{2}.\frac{AB}{AB_1} + \frac{1}{2}\frac{AC}{AC_1}$ "về bài toán trong HH không gian.

c. Hãy thuyết phục với cả lớp rằng dự đoán ở câu b là đúng bằng cách chứng minh bởi SL toán học.

d. Em hãy chuyển bài toán đã được chuyển trong HH không gian về bài toán tổng quát. Từ đó hãy chứng tỏ dự đoán đó là đúng bởi chứng minh bằng SL toán học.

PHIẾU HỌC TẬP SỐ 6

Bài toán 1: "Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* có đáy là hình vuông cạnh bằng a và góc $A'BA = 60^0$. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *BC* và *AD*. Xác định và tính khoảng cách từ điểm *A* đến (*A'MN*)".

a. Hãy tách tứ diện *A'ABC* ra khỏi hình hộp và xây dựng giả thiết và kết luận của bài toán trên theo cách nhìn khác của em. Chú ý đến việc xây dựng giả thuyết của bài toán không được trùng lặp với giả thuyết đã cho.

b. Hãy phát biểu hoàn chỉnh bài toán được xây dựng và kiểm chứng giả thuyết của bài toán để thấy được sự hợp lý của bài toán.

Bài toán 2: "Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh bằng a, và $ABC = 60^0$. Gọi *M, H* lần lượt là trung điểm của *A'B'* và *AB*. $MCH = 30^0$. Xác định và tính khoảng cách từ điểm *H* đến (*MAC*).".

a. Hãy tách tứ diện *MABC* ra khỏi hình hộp và xây dựng giả thiết và kết luận của bài toán trên theo cách nhìn khác của em. Chú ý đến việc xây dựng giả thuyết của bài toán không được trùng lặp với giả thuyết đã cho.

b. Hãy phát biểu hoàn chỉnh bài toán được xây dựng và kiểm chứng giả thuyết của bài toán để thấy được sự hợp lý của bài toán.

PHỤ LỤC 2

PHIẾU THĂM DÒ Ý KIẾN CỦA GIÁO VIÊN

(*dùng khảo sát nghiên cứu và thăm dò ý kiến trước khi dạy thực nghiệm)*

Xin Thầy (Cô) vui lòng đọc kỹ những câu hỏi dưới đây và tích vào ô mà mình lựa chọn (☑). Những ý kiến của các Thầy (Cô) sẽ rất có ý nghĩa đối với chúng tôi trong quá trình thực hiện nghiên cứu.

Câu 1: Tổ chức giờ học có sử dụng hoạt động PĐ của các thầy cô ở mức độ nào?

a. Thường xuyên	☐
b. Thỉnh thoảng	☐
c. Hiếm khi	☐
d. Không bao giờ	☐

Câu 2. Thầy cô thường gặp những khó khăn nào khi tổ chức các hoạt động PĐ cho HS?

……

……

……

……

……

Câu 3: Theo quan điểm của các thầy cô thì hoạt động PĐ trong các giờ học có thật sự hữu ích đối với HS hay không? Cho biết lý do vì sao thầy cô nghĩ có hoặc không?

……

……

……

……

……

Câu 4: **Trong các loại NL sau của HS, Thầy (Cô) quan tâm tới loại NL nào:**

1	NL nhận ra sự tương tự và sự khác nhau giữa các tình huống.	☐
2	NL phán đoán	☐
3	NL huy động vốn kiến thức của HS.	☐
4	NL liên tưởng giữa các đối tượng.	☐
5	NL khái quát hóa, tương tự hóa, đặc biệt hóa.	☐
6	NL thay đổi, điều chỉnh tri thức đã có để GQVĐ.	☐
7	NL biến đổi đối tượng.	☐
8	NL nhìn nhận bài toán dưới nhiều khía cạnh khác nhau.	☐
9	Các năng lực khác:……	

Câu 5. Theo Thầy (Cô), khi học tập HS thường biểu hiện những NL nào sau đây:

1	NL nhận ra sự tương tự và sự khác nhau giữa các yếu tố của HH phẳng và HH không gian.	☐
2	NL phán đoán	☐
3	NL huy động vốn kiến thức.	☐
4	NL liên tưởng giữa các đối tượng.	☐
5	NL khái quát hóa, tương tự hóa, đặc biệt hóa.	☐
6	NL thay đổi, điều chỉnh tri thức đã có để GQVĐ.	☐
7	NL biến đổi đối tượng.	☐
8	NL nhìn nhận bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau.	☐
9	Các năng lực khác: ……	

Câu 6. Trong DH HH, Thầy (Cô) thường sử dụng các loại hoạt động nào:

1	Hoạt động biến đổi hình thức của bài toán nhằm quy lạ về quen.	☐
2	Hoạt động biến đổi tương đương giả thiết và kết luận để HS dễ dàng huy động kiến thức cho việc GQVĐ.	☐
3	Hoạt động đề xuất các vấn đề tương tự.	☐
4	Hoạt động liên tưởng.	☐
5	Hoạt động khái quát hóa bài toán	☐
6	Hoạt động phán đoán.	☐
7.	Hoạt động khác: ……..	

Câu 7: Khi gặp các bài toán HS chưa thể sử dụng kiến thức đã có để giải thì Thầy (Cô) định hướng cho HS các cách giải như thế nào:

1	Biến đổi bài toán về dạng dễ thiết lập với các kiến thức đã có.	☐
2	Chuyển đổi ngôn ngữ để dễ dàng làm bộc lộ hướng giải quyết.	☐
3	Thay đổi hình thức và nội dung của bài toán để dễ dàng gắn kết với các kiến thức và kinh nghiệm đã có.	☐
4	Ý kiến khác: …….....	

Câu 8: Trong DH HH không gian, Thầy (cô) đã bồi dưỡng cho HS các NL huy động kiến thức để GQVĐ, đó là:

1	NL chuyển việc giải bài toán không gian về bài toán phẳng.	☐
2	NL chuyển đổi giữa các ngôn ngữ đại số và ngôn ngữ HH.	☐
3	NL tương tự hóa.	☐
4	NL khái quát hóa.	☐
5	NL trừu tượng hóa.	☐
6	Các năng lực khác: ……	

Câu 9: Trong DH khái niệm, theo Thầy (cô) tập trung vào yếu tố nào sau đây là tốt nhất:

1	HS nắm được ý nghĩa của khái niệm.	☐
2	HS biết vận dụng trực tiếp các khái niệm vào giải các bài toán đơn giản.	☐
3	HS biết khai thác các ứng dụng khác nhau của khái niệm vào việc giải các bài tập trong SGK.	☐
4	HS biết khai thác các ứng dụng của khái niệm vào việc giải các bài tập nâng cao.	☐
5	Ý kiến khác. …….	

Câu 10: Trong DH định lí, theo Thầy (Cô) tập trung vào yếu tố nào sau đây là tốt nhất:

1	HS nắm được ý nghĩa của định lí	☐
2	HS biết vận dụng trực tiếp các định lí vào giải các bài toán đơn giản.	☐
3	HS biết khai thác các ứng dụng của định lí vào việc giải các bài tập trong SGK.	☐
4	HS biết khai thác các ứng dụng của định lí vào việc giải các bài tập nâng cao.	☐
5	Sử dụng các kiến thức đã biết để suy đoán được định lý sẽ học và ứng dụng định lý vào việc giải toán	☐
6	Ý kiến khác. …….	

Câu 11: Trong DH giải bài tập toán, theo Thầy (Cô) tập trung vào yếu tố nào sau đây là tốt nhất:

1	HS nắm được các phương pháp giải bài tập toán.	☐
2	HS biết vận dụng trực tiếp các phương pháp vào giải các bài toán đơn giản.	☐
3	HS biết vận dụng trực tiếp các phương pháp vào giải các bài tập trong SGK.	☐
4	HS biết vận dụng trực tiếp các phương pháp vào giải các bài tập nâng cao.	☐
5	Ý kiến khác. ……..	

Câu 12: Để tăng cường NLPĐ trong DH HH cho HS thì Thầy (Cô) thường chú ý các hoạt động nào sau đây:

1	Hoạt động DH khái niệm.	☐
2	Hoạt động DH định lí.	☐
3	Hoạt động DH giải bài tập toán.	☐
4	Hoạt động dạy khai thác các ứng dụng của khái niệm, định lí vào giải bài tập.	☐
5	Ý kiến khác. ……	

Câu 13: Theo Thầy (Cô) HS thường gặp những khó khăn nào khi học HH không gian?

1	Khó khăn trong việc hình dung các hình không gian thông qua hình biểu diễn.	☐
2	Khó khăn trong việc xác lập mối liên hệ giữa HH phẳng và HH không gian.	☐
3	Khó khăn trong việc không nắm được sự tương tự giữa HH phẳng và HH không gian.	☐
4	Khó khăn trong việc không nắm được các khái niệm trừu tượng như: điểm, đường thẳng, mặt phẳng và các mối quan hệ giữa chúng.	☐
5	Các khó khăn khác. ……..	☐

Câu 14: Theo Thầy (Cô) HS thường gặp những sai lầm gì khi học HH không gian:

1	Sai lầm trong việc sử dụng các yếu tố tương tự của HH phẳng sang HH không gian.	☐
2	Sai lầm do xét thiếu trường hợp.	☐
3	Sai lầm liên quan đến ngôn ngữ diễn đạt	☐
4	Sai lầm trong vẽ hình biểu diễn	☐
5	Ý kiến khác……..	

Câu 15: Trong DH HH không gian, Thầy (Cô) thường sử dụng mối liên hệ giữa nào HH phẳng và HH không gian:

1	Sử dụng sự tương tự giữa HH phẳng và HH không gian.	☐
2	Chuyển bài toán HH không gian về bài toán HH phẳng.	☐
3	Tách các bộ phận phẳng ra khỏi HH không gian.	☐
4	Sử dụng phép chiếu song song để chuyển từ bài toán không gian về bài toán phẳng.	☐
5	Ý kiến khác. ……..	

Câu 16: Xin Thầy (Cô) cho biết quan điểm về việc sử dụng các yếu tố phụ trong DH HH.

1	Sử dụng các đường thẳng phụ để liên kết giữa giả thiết và kết luận.	☐
2	Sử dụng các mặt thẳng phụ để liên kết giữa giả thiết và kết luận.	☐
3	Sử dụng các bài toán phụ liên quan đến bài toán trong việc phát hiện và GQVĐ.	☐
4	Ý kiến khác:	

Câu 17. Xin Thầy (Cô) cho biết mức độ sử dụng trong DH toán theo các nội dung sau:

Mức độ / *Nội dung*	*Thường xuyên*	*Không thường xuyên*	*Ít khi*
1. Giải thích để HS hiểu rõ bản chất kiến thức Toán học.	☐	☐	☐
2. Tổ chức hoạt động PĐ cho HS trong dạy HH không gian	☐	☐	☐
3. Khi dạy xong một chương hệ thống một cách đầy đủ các kiến thức trọng tâm nằm rải rác trong chương.	☐	☐	☐

4. Khi dạy giải bài tập có khuyến khích HS tìm nhiều lời giải khác nhau của một bài toán	☐	☐	☐
5. Quan tâm đến những biểu hiện của NLPĐ của HS.	☐	☐	☐
6. HS phổ thông có biểu hiện NL thay đổi, điều chỉnh tri thức đã có để GQVĐ.	☐	☐	☐
7. Quan tâm các giai đoạn phát triển của kiến thức toán đang dạy.	☐	☐	☐
8. Chỉ dạy phục vụ cho việc thi cử, đặc biệt là thi đại học và thi tốt nghiệp.	☐	☐	☐
9. Ngoài việc dạy phục vụ cho việc thi cử còn chú trọng rèn luyện khả năng huy động kiến thức cho việc giải toán, chưa chú ý khai thác, nhìn nhận vấn đề theo các góc độ khác nhau.	☐	☐	☐

Câu 18: Khi DH HH Thầy (Cô) có nên đưa hoạt động dự đoán vào tiến trình DH của mình không? Nếu có xin thầy (Cô) cho biết mức độ sử dụng hoạt động PĐ trong quá trình DH của mình.

……

……

……

Câu 19: Theo Thầy (Cô) thì những khó khăn nào mà HS thường gặp trong hoạt động dự đoán trong khi học HH.

.....……

…….....

……

……

Câu 20. Cuối cùng, xin Thầy (Cô) vui lòng cho biết một số thông tin về bản thân:

1. Số năm trực tiếp dạy toán ở trường THPT:.....
2. Công việc chính hiện nay (*GV đứng lớp; Cán bộ quản lí*):.....

PHỤ LỤC 3

CÂU HỎI PHỎNG VẤN DÀNH CHO HỌC SINH

Câu hỏi 1

Em hãy cho biết những khó khăn khi các em dự đoán công thức/giả thuyết của một bài toán?

Câu hỏi 2

Em hãy cho biết những khó khăn khi các em dự đoán các ý CM một bài toán?

Câu hỏi 3

Em hãy cho biết những khó khăn khi các em xây dựng giả thuyết của bài toán theo con đường xem xét giả thuyết của một bài toán dưới khía cạnh khác nhau?

Câu hỏi 4

Em hãy cho biết những khó khăn khi các em chuyển giả thuyết từ bài toán trong HH phẳng sang bài toán trong HH không gian?

Câu hỏi 5

Em hãy cho biết những khó khăn khi các em sử dụng các hoạt động trí tuệ như: Phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, đặc biệt hóa, so sánh, ...để dự đoán giả thiết hay kết luận của một bài toán nào đó?

Câu hỏi 6

Theo em, dự đoán giả thuyết của bài toán và dự đoán các bước chứng minh thì hoạt động nào cần thiết hơn? Hãy cho chúng tôi biết lý do?

Câu hỏi 7

Theo em, khi thảo luận để đưa ra PĐ thì mỗi nhóm thảo luận cần bao nhiêu người? Vì sao?

Câu hỏi 8

Các phương tiện như: Các phần mềm HH, mô hình trực quan, bảng số liệu, sơ đồ, ... giúp ích em điều gì trong quá trình dự đoán công thức hay kết luận của một bài toán?

Câu hỏi 9

Khi CM một bài toán mới em thường dựa vào căn cứ nào sau đây:

a. Dựa vào các bước CM của GV khi thấy bài toán đó tương tự với bài toán mà thầy (cô) đã giải.

b. Dựa vào các bước CM trong SGK khi thấy bài toán đó tương tự với bài toán trong SGK.

c. Dựa vào các định lý, định nghĩa, khái niệm, mệnh đề đúng, ... đã được học làm căn cứ cho mỗi bước CM của mình.

d. Giải toán theo suy nghĩ riêng của mình.

e. Ý kiến khác.

PHỤ LỤC 4

GIÁO ÁN DẠY THỰC NGHIỆM

Giáo án 1: BÀI TẬP (Khoảng cách)

(*Tiết 42 trong phân phối chương trình HH cơ bản lớp 11*)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức:

+ HS hiểu được bản chất của các định nghĩa, định lý được vận dụng để xây dựng bài toán mới.

2. Về kĩ năng:

+ HS có kỹ năng sử dụng các định nghĩa, định lý để làm căn cứ xây dựng giả thuyết của bài toán.

3. ***Về tư duy, thái độ :*** Rèn luyện tư duy logic, khả năng LLCCC, tính cẩn thận.

II. CHUẨN BỊ CỦA GIÁO VIÊN VÀ HỌC SINH

1. Chuẩn bị của HS:

☐ Thước kẻ, compa. ☐ Học sinh đọc bài này trước ở nhà.

☐ Bài cũ ☐ .....

2. Chuẩn bị của GV:

☐ Thước kẻ, compa. ☐ Các hình vẽ.

☐ Các bảng phụ ☐ Phiếu học tập cho học sinh

☐ Computer, projector

III. PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC

☐ Gợi mở, vấn đáp. .....

☐ Phát hiện và giải quyết vấn đề .....

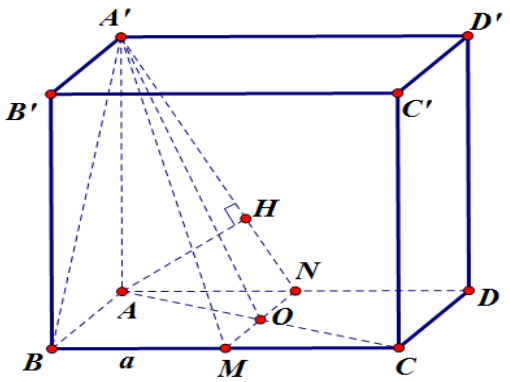
☐ Hoạt động nhóm. .....

IV. TIẾN TRÌNH BÀI DẠY

Hoạt động 1: *Kiểm tra bài cũ*

Bài toán 1: Cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'* có đáy là hình vuông cạnh bằng a và góc $A'BA = 60^0$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *BC* và *AD*.

Xác định và tính khoảng cách từ điểm *A* đến (*A'MN*).



Dự kiến câu trả lời:

Từ *A* kẻ *AH* vuông góc với *A'N*. Ta có *AH* chính là khoảng cách cần tìm.

Thật vậy, $\begin{cases} AH \perp A'N \\ AH \perp MN (MN \perp (AA'D'D)) \Rightarrow AH \perp (A'MN) \\ A'N \cap MN = \{N\} \end{cases}$

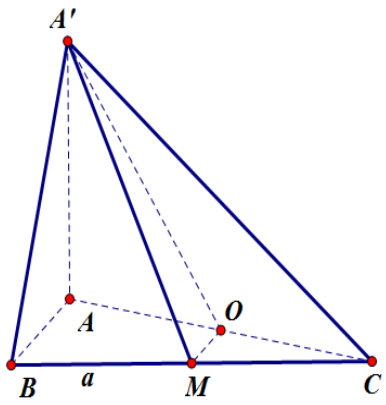
Tính *AH*

Xét tam giác vuông *A'BA* ta có:

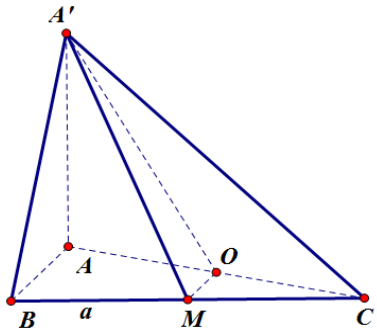
$AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông *A'AN* ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{13}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{39}}{13}$

Hoạt động 2: Hướng dẫn HS xây dựng giả thuyết của một bài toán bằng cách nhìn giả thiết và kết luận của bài toán theo khía cạnh khác.

Hoạt động của HS	Hoạt động của GV	Ghi bảng - Trình chiếu
+ HS thực hiện yêu cầu của GV. +Cho hình chóp *A'.ABC* có đáy là tam giác vuông cân tại *B*, *AB=a* và góc $A'BA = 60^0$. AA' vuông góc với mặt đáy. Gọi *M*, *O* lần lượt là trung điểm của *BC* và *AC*. Xác định và tính khoảng cách từ điểm *A* đến (*A'MO*). *+ Dự kiến một số cách nhìn giả thiết và kết luận của HS theo khía cạnh*	+ Em hãy tách tứ diện *A'ABC* ra khỏi hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* của bài toán 1. + Hãy phát biểu giả thiết và kết luận của bài toán sau khi tách tứ diện *A'ABC* ra khỏi hình hộp. + Hãy xây dựng bài toán mới bằng cách nhìn	

khác: $A'A \perp (ABC)$ được nhìn ở khía cạnh hai mặt bên cùng vuông góc với đáy thì giao tuyến của chúng vuông góc ở đáy, tức là: $\begin{cases}(A'AB)\perp(ABC)\\(A'AC)\perp(ABC)\\(A'AB)\cap(A'AC)=AA'\end{cases}$ Căn cứ là định lý: "Hai mặt phẳng (*P*), (*Q*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*R*) thì giao tuyến của (*P*) và (*Q*) vuông góc với (*R*). + *O* là trung điểm *AC* được nhìn ở khía cạnh *MO* là đường trung bình của tam giác *CAB*. + Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (*A'MO*) nhìn ở khía cạnh khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *AB* và *A'O* do $\begin{cases}AB//(A'MO)\\A'M\subset(A'MO)\end{cases}$. *Dự kiến câu trả lời của HS*:	giả thiết và kết luận của bài toán trên theo khía cạnh khác? Hãy cho biết em dựa vào căn cứ nào để có cách nhìn như thế? GV lấy ví dụ minh họa cách làm: Chẳng hạn: Vì *AB* là hình chiếu vuông góc của A*'B* lên (*ABC*) nên $A'BA=60^0$ được nhìn ở khía cạnh là góc giữa đường thẳng *A'B* với mặt phẳng (*ABC*). Căn cứ để xác định điều này là định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Hoặc $A'BA=60^0$ được nhìn ở khía cạnh góc giữa hai mặt phẳng (*A'BC*) và (*ABC*) bằng 60^0 dựa vào căn cứ là định nghĩa: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó". Em hãy phát biểu giả	

Cho hình chóp A'.*ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, *AB*=a, hai mặt phẳng (*A'AB*) và (*A'AC*) cùng vuông góc với đáy. Gọi *M* là điểm nằm trên *BC* sao cho *MO* là đường trung bình của tam giác *CAB*. Biết góc giữa hai mặt phẳng (*A'BC*) và (*ABC*) bằng 60^0. Xác định và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *A'O* theo *a*. HS sử dụng SL các căn cứ : Đó là các định nghĩa, định lý mà các em đã xác định để tìm lời giải cho bài toán mà các em xây dựng. Việc tìm khoảng cách của bài toán mới chính là tìm khoảng cách của bài tập kiểm tra bài cũ.	thuyết mà em vừa xây dựng? Để khẳng định giả thuyết của mình là đúng, em hãy CM bài toán em vừa xây dựng?	

Hoạt động 3: Củng cố và bài tập về nhà

Từ bài toán dưới đây em hãy xây dựng bài toán mới bằng cách nhìn giả thiết và kết luận của bài toán theo khía cạnh khác. Hãy CM bài toán mới để khẳng định bài toán đó là đúng.

"Cho hình hộp đứng *ABCD.A'B'C'D'* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh bằng a, và $ABC = 60^0$. Gọi *M, H* lần lượt là trung điểm của *A'B'* và *AB*. $MCH = 30^0$. Xác định và tính khoảng cách từ điểm *H* đến (*MAC*)."

Giáo án 2: Bài tập
(tiết 9 trong phân phối chương trình HH cơ bản lớp 12)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức :

+ HS hiểu các công thức về tính thể tích khối đa diện, công thức về tỉ lệ thể tích giữa hai khối tứ diện.

2. Về kĩ năng :

+HS áp dụng được các công thức đã học để giải quyết các bài toán.

+ HS thành thạo kỹ năng tính toán.

+ HS có kỹ năng xây dựng lời giải của bài toán HH không gian từ việc tương tự các ý chứng minh của bài toán trong HH phẳng.

3. ***Về tư duy, thái độ :*** Rèn luyện tư duy logic, tính cẩn thận, chính xác trong tính toán và lập luận.

II. CHUẨN BỊ CỦA GIÁO VIÊN VÀ HỌC SINH

1. Chuẩn bị của học sinh:

- ☐ Thước kẻ, compa.
- ☐ Học sinh làm bài tập ở nhà.
- ☐ Bài cũ
- ☐ .....

2. Chuẩn bị của giáo viên :

- ☐ Thước kẻ, compa.
- ☐ Các hình vẽ.
- ☐ Các bảng phụ
- ☐ Bài để phát cho học sinh
- ☐ Computer, projector..

III. PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC

- ☐ Gợi mở, vấn đáp. .....
- ☐ Phát hiện và giải quyết vấn đề .....
- ☐ Hoạt động nhóm. .....

IV. TIẾN TRÌNH BÀI DẠY

Hoạt động 1: Kiểm tra bài cũ

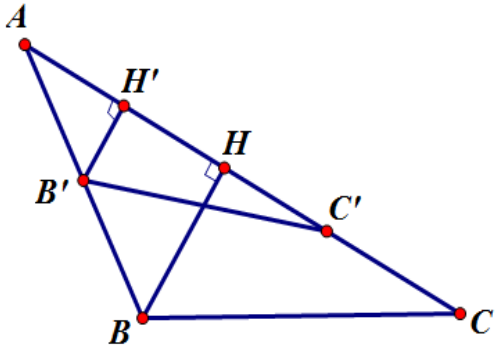
+ Từ công thức tỉ lệ diện tích giữa hai tam giác $AB'C'$ và ABC (ở hình 1) là $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$(*) thì em hãy suy đoán công thức tỉ lệ thể tích giữa hai tứ diện $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}$ (Hình 2) là gì?

+ Dự kiến câu trả lời:

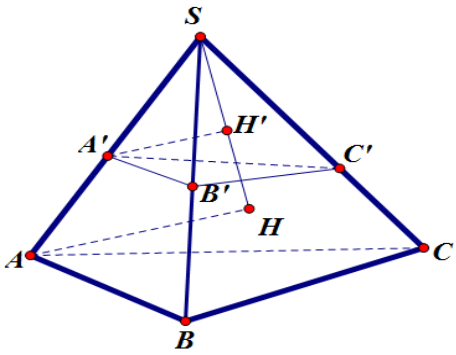
$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} \quad (2*)$$

+ Em dựa vào căn cứ nào để dự đoán công thức là như thế?

Dự đoán trả lời: Dựa vào suy luận tương tự.

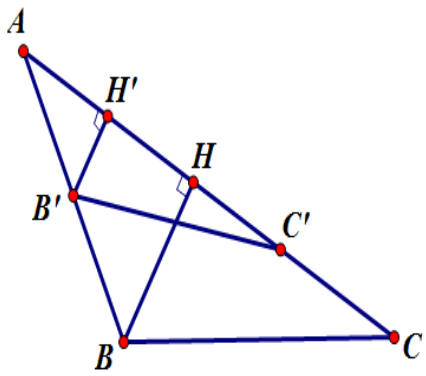


Hình 1



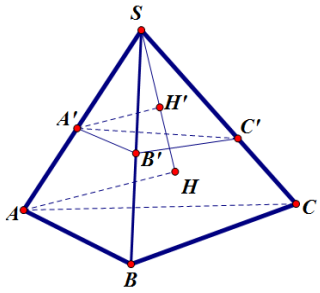
Hình 2

Hoạt động 2: Hướng dẫn HS ôn lại các bước CM bài toán (*) (bài toán đã học ở lớp dưới)

Hoạt động của HS	Hoạt động của GV	Ghi bảng - Trình chiếu
Dự kiến câu trả lời: $S = \frac{1}{2}h.a$ trong đó h là đường cao của tam giác và a là cạnh đáy tương ứng với đường cao. Cạnh AC' và AC là hai cạnh cùng nằm trên đường thẳng. $S_{AB'C'} = \frac{1}{2}B'H'.AC'$ và	+Câu hỏi 1: Công thức quen thuộc để tính diên tích tam giác là gì? + Câu hỏi 2: Hai tam giác $AB'C'$ và ABC có các cạnh đáy nào cùng nằm trên một đường thẳng? + Câu hỏi 3: Hãy tính diện tích của hai tam giác $AB'C'$ và	 Ta có: $S_{AB'C'} = \frac{1}{2}B'H'.AC'$ và $S_{AB'C'} = \frac{1}{2}BH.AC$.

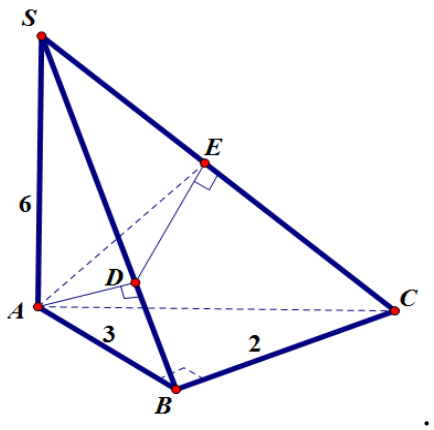
$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}BH.AC$. $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{B'H'}{BH}.\frac{AC'}{AC}$ $= \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$	*ABC* theo các cạnh đáy lần lượt là *AC'* và *AC*? + Câu hỏi 4: Lập tỉ lệ diện tích giữa 2 tam giác trên để suy ra công thức cần CM?	$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{B'H'}{BH}.\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$

Hoạt động 3: Hướng dẫn các nhóm học tập dự đoán để tìm các ý CM cho bài toán (2*)

Hoạt động của HS	Hoạt động của GV	Ghi bảng - Trình chiếu
Dự kiến câu trả lời của các nhóm học tập:	Phát biểu bài toán vừa dự đoán	**Bài toán 1** Cho tứ diện *SABC*. Trên các đoạn thẳng SA, *SB*, *SC* lần lượt lấy các điểm *A'*, *B'*,*C'* khác với điểm *S*. CM: $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$ (2*)
+ Các câu hỏi tương ứng là: + **Hỏi 1**: Công thức để tính thể tích của tứ diện là gì? + **Hỏi 2**: Hai tứ diện *SA'B'C'* và *SABC* có hai mặt đáy nào cùng thuộc một mặt phẳng ? + Hỏi 3: Tính thể tích của các tứ diện *SA'B'C'* và *SABC* theo các mặt đáy lần lượt là (*SB'C'*) và (*SBC*)? **Hỏi 4**: Lập tỉ lệ thể tích giữa hai tứ diện *SA'B'C'* và *SABC*?	Dựa vào câu hỏi thầy vừa đặt ra để CM cho công thức (*), các em hãy xác định các câu hỏi để xây dựng các bước CM cho bài toán (2*)? + GV yêu cầu các nhóm trả lời các câu hỏi mà mỗi nhóm đặt ra. + GV yêu cầu các nhóm nối các câu trả lời để được một bài giải hoàn chỉnh.	 $V = \frac{1}{3}B.h$ trong đó h là đường cao của tứ diện và B là diện tích đáy tương ứng với đường cao. Ta có (*SB'C'*) và (*SBC*) cùng thuộc một mặt phẳng. Gọi H và H' là chân đường đường cao xuất phát từ A và A' lên mặt phẳng (SBC). → $V_{SA'B'C'} = \frac{1}{3}A'H'.S_{SB'C'}$ và $V_{SA'B'C'} = \frac{1}{3}AH.S_{SBC}$.

		+ Tỉ lệ thể tích giữa hai tứ diện *SA'B'C'* và *SABC*? $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{A'H'}{AH}.\frac{S_{SB'C'}}{S_{SBC}}$ $= \frac{A'H'}{AH}.\frac{\frac{1}{2}.SB'.SC'.\sin A}{\frac{1}{2}.SB.SC.\sin A}$ $= \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

Hoạt động 4: Luyện tập một số bài toán tính thể tích của tứ diện từ việc áp dụng công thức (2*)

Hoạt động của HS	Hoạt động của GV	Ghi bảng - Trình chiếu
+ Thể tích của khối chóp *S.ABC*. $\frac{V_{S.ADE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SD}{SB}.\frac{SE}{SC}$ $= \frac{SD}{SB}.\frac{SE}{SC}$ + Tỉ số $\frac{SD}{SB}; \frac{SE}{SC}$ và thể tích của khối chóp *S.ABC*. $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2}$ $= \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2}$ $= \sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}$ $= \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$ $SA^2 = SD.SB$ $\Rightarrow \frac{SD}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{6^2}{(3\sqrt{5})^2} = \frac{4}{5}$ $SA^2 = SE.SC$ $\Rightarrow \frac{SE}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{6^2}{7^2} = \frac{36}{49}$	+ Theo các em để tính thể tích *S.ADE* ta dựa vào thể tích của khối chóp nào? + Hãy xác định công thức tỉ lệ thể tích giữa hai khối chóp *S.ADE*, *S.ABC*?(dựa vào công thức (2*)) + Vậy, chúng ta cần tính cái gì? + Hãy tính các tỉ số $\frac{SD}{SB}$ và $\frac{SE}{SC}$ và thể tích của khối chóp *S.ABC*?	**Bài toán 2:** Cho hình chóp *S..ABC* có đáy là tam giác vuông tại *B*, cạnh *SA* vuông góc với đáy. Gọi *D*, *E* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* lên *SB*, *SC*. Biết rằng *AB* = 3, *BC* = 2 và *SA* = 6. Tính thể tích khối chóp *S.ADE* 

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$ $= \frac{1}{6} \cdot 6.3.2 = 6$ $\Rightarrow V_{S.ADE} = \frac{SD}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} \cdot V_{S.ABC}$ $= \frac{4}{5} \cdot \frac{36}{49} \cdot 6 = \frac{864}{245}$	+ Từ đó hãy tính thể tích của khối chóp *S.ADE?*	

Hoạt động 5: Củng cố và ra bài tập về nhà.

+ Cho học sinh nhắc lại các công thức tính thể tích của các khối đa diện. Rèn luyện tư duy để giải các tình huống có vấn đề.

+ Hướng dẫn học sinh giải các bài tập 5, 6 trang 26 của SGK HH cơ bản lớp 12.

Giáo án 3: Ôn tập chương II
(tiết 23 trong phân phối chương trình HH cơ bản lớp 12)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức:

+ HS hiểu được việc áp dụng các kết quả của bài toán trong HH phẳng để giải quyết các bài toán HH không gian.

+ HS hiểu được việc xây dựng giả thuyết của một bài toán nhờ tương tự.

2. Về kĩ năng:

+ HS có kỹ năng chuyển một một số bài toán trong HH phẳng sang bài toán trong HH không gian.

+ HS biết cách sử dụng kết quả trong HH phẳng để xây dựng các bước giải cho bài toán HH không gian.

3. ***Về tư duy, thái độ :*** Rèn luyện tư duy logic, tính cẩn thận, chính xác trong tính toán và lập luận.

II. CHUẨN BỊ CỦA GIÁO VIÊN VÀ HỌC SINH

1. Chuẩn bị của học sinh:

- ☐ Thước kẻ, compa.
- ☐ Bài cũ
- ☐ Học sinh làm bài tập ở nhà.
- ☐ .....

2. Chuẩn bị của giáo viên :

- ☐ Thước kẻ, compa.
- ☐ Các bảng phụ
- ☐ Computer, projector..
- ☐ Các hình vẽ.
- ☐ Bài để phát cho học sinh

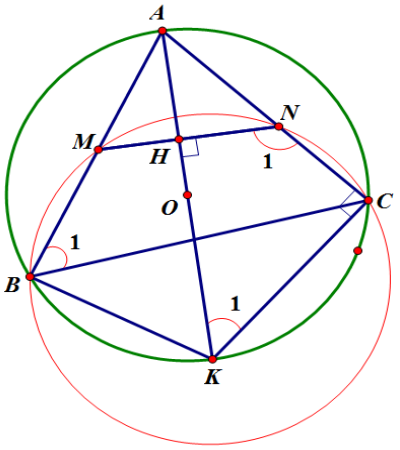
III. PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC

- ☐ Gợi mở, vấn đáp. .....
- ☐ Phát hiện và giải quyết vấn đề .....
- ☐ Hoạt động nhóm. .....

IV. TIẾN TRÌNH BÀI DẠY

Hoạt động 1: Kiểm tra bài cũ

Bài toán 1: "Đường tròn tâm *O* ngoại tiếp tam giác *ABC*, đường thẳng vuông góc với *AO* cắt *AB*, *AC* lần lượt tại *M* và *N*. CM bốn điểm *M*, *N*, *B*, *C* cùng thuộc một đường tròn.



Dự kiến câu trả lời của HS:

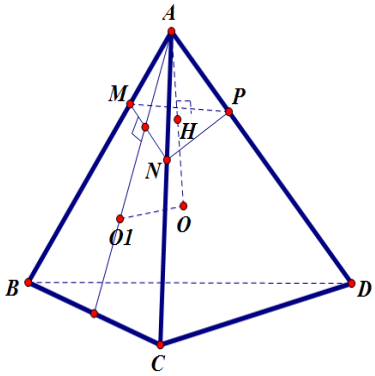
Xét tứ giác *HKCN* ta có: $H = 90^0$ và $C = 90^0$ nên $H + C = 180^0$.

$\Leftrightarrow N_1 + K_1 = 180^0 \Leftrightarrow N_1 + B_1 = 180^0$ ($B_1 = K_1$ do cùng chắn cung AC).

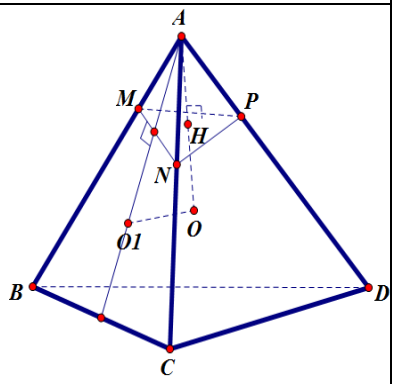
Vậy, các điểm *M*, *N*, *B*, *C* cùng nằm trên đường tròn.

Hoạt động 2: Hướng dẫn các nhóm học tập xây dựng bài toán HH trong không gian từ bài toán trong HH phẳng nhờ tương tự

Hoạt động của HS	Hoạt động của GV	Ghi bảng - Trình chiếu
Dự kiến câu trả lời: +Đường tròn tâm *O* trong HH phẳng tương tự với mặt cầu tâm *O* trong HH không gian. + Tam giác *ABC* trong HH phẳng tương tự tứ diện *ABCD* trong HH không	+ Hãy xác giả thiết và kết luận của bài toán 1? + Theo em khái niệm đường tròn tâm *O* trong HH phẳng tương tự với khái niệm nào trong HH không gian? + Khái niệm tam giác *ABC* trong HH phẳng tương tự khái niệm nào trong HH không gian?	Phát biểu bài toán tương tự: Mặt cầu tâm *O* ngoại tiếp tứ diện *ABCD*. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng *AO* cắt các cạnh *AB*, *AC*, *AD* lần lượt tại *M*, *N*, *P*. CM *sáu điểm B,C, D, M, N, P cùng thuộc một mặt cầu*

gian. + Đường thẳng trong HH phẳng tương tự với mặt phẳng trong HH không gian. + *"Sáu điểm B, C, D, M, N, P cùng thuộc một mặt cầu"* trong HH không gian tương tự với *"M, N, B, C* cùng thuộc một đường tròn" trong HH phẳng. Dự kiến câu trả lời của HS: Mặt cầu tâm *O* ngoại tiếp tứ diện *ABCD*. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng *AO* cắt các cạnh *AB*, *AC*, *AD* lần lượt tại *M*, *N*, *P*. CM *sáu điểm B, C, D, M, N, P cùng thuộc một mặt cầu*	+ Khái niệm đường thẳng trong HH phẳng tương tự khái niệm nào trong HH không gian? + Em hãy dự đoán mệnh đề (trong HH không gian) tương tự với mệnh đề đúng: *"M, N, B, C* cùng thuộc một đường tròn" (trong HH phẳng)? + Em hãy phát biểu bài toán mới tương tự với bài toán 1?	

Hoạt động 3: Hướng dẫn các nhóm xây dựng các bước CM cho bài toán 2.

Hoạt động của HS	Hoạt động của GV	Ghi bảng - Trình chiếu
+ Dự kiến câu trả lời: O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $AO_1 \perp MN$. + Từ *O* dựng OO_1 vuông góc với (*ABC*). Ta có	+ Xét tam giác *ABC* của tứ diện *ABCD*, có $M \in AB, N \in AC$. Để áp dụng kết quả của bài toán 1 thì các em cần bổ sung giả thiết nào còn thiếu? + Làm thế nào để em	

$AO_1 \perp MN$ (áp dụng định lý ba đường vuông góc. ***Dựa vào căn cứ***: Do O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nên nếu O_1 là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC) thì O_1 là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. *Dự kiến câu trả lời:* M, N, B, C cùng nằm trên đường tròn (C_1). dựa vào tính chất: "Trên mỗi mặt phẳng trong không gian, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng" *Dự kiến câu trả lời*: + Ta có kết quả N, P, C, D cùng nằm trên đường tròn (C_2) + *Dự kiến câu trả lời*: Vì hai đường tròn (C_1) và (C_2) thuộc hai mặt phẳng cắt nhau và chúng cắt nhau tại hai điểm N, C. Do hai đường tròn (C_1) và (C_2) thuộc một mặt cầu nên sáu điểm B,C, D, M, N, P cùng thuộc một mặt cầu.	xác định được tâm O_1?Em dựa vào căn cứ nào để có cách xác định như thế? Bây giờ chúng ta đã áp dụng được kết quả bài toán 1 cho mặt phẳng (ABC) được chưa? Nếu được ta có điều gì? Em dựa căn cứ nào để áp dụng kết quả của bài toán 1 cho bài toán HH không gian? + GV yêu cầu các nhóm học tập giải quyết trường hợp tương tự đối với mặt phẳng (ACD). Như thế, ta có kết quả gì đối với mặt phẳng (ACD)? + Sáu điểm B,C, D, M, N, P có cùng thuộc một mặt cầu không? Vì sao?	

Hoạt động 4: Củng cố và bài tập về nhà.

Bài tập 4, 5 trang 50 SGK HH cơ bản lớp 12.

PHỤ LỤC 5
BÀI KIỂM TRA THỰC NGHIỆM

Đề số 1: Đề kiểm tra đợt thực nghiệm thứ nhất (thời gian 45 phút) - Khối 11

Câu 1: Cho hình hộp đứng *ABCD.A'B'C'D'* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh bằng a, và $ABC = 60^0$. Gọi *M, H* lần lượt là trung điểm của *A'B'* và *AB*. $MCH = 30^0$. Xác định và tính khoảng cách từ điểm *H* đến (*MAC*).

Câu 2: Cho hình chóp *M.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh a, tam giác *SAB* cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC), góc hợp bởi cạnh *MC* và (*ABC*) là 30^0. Xác định và tính khoảng cách từ điểm *B* đến (*MAC*).

Đề số 2: Đề kiểm tra số I đợt thực nghiệm thứ hai (thời gian 45phút) - Khối 12

Bài toán: Trong các hình chữ nhật *ABCD* có đường chéo l thì hình nào có diện tích lớn nhất? (1)

a. Em hãy sử dụng suy luận Toán học để tìm lời giải cho bài toán (1)
b. Từ bài toán (1), em hãy dự đoán bài toán trong HH không gian tương tự với bài toán (1).
c. Sử dụng các bước CM ở câu a) để tìm lời giải cho bài toán mới. Từ đó khẳng định tính đúng/sai của bài toán mới.

Đề số 3: Kiểm tra số II đợt thực nghiệm thứ hai (thời gian 45 phút)- Khối 12

Cho mặt phẳng (*P*), cho hình vuông *ABCD* tâm *O*. Trên đường thẳng *Ax* vuông góc với (*P*) ta lấy một điểm *S* tùy ý và dựng mặt phẳng (*Q*) đi qua *A* và vuông góc vơi *SC*. Mặt phẳng (*Q*) cắt các cạnh *SB, SC, SD* lần lượt tại *B*', *C*', *D*'.

a. Khi *S* di động trên *Ax* thì bảy điểm *A, B, C, D, B*', *C*', *D*' cùng thuộc đối tượng Toán học nào (đối tượng đó phải cố định và xác định được)?
b. Sử dụng SL Toán học để khẳng định chúng thuộc đối tượng đó. Từ đó, chỉ rõ đối tượng đó được xác định như thế nào trong bài toán này?

PHỤ LỤC 6

Bảng hỏi dành cho giáo viên sau dạy thực nghiệm

Họ và tên cán bộ trả lời:.....

Đơn vị:.....

Chức vụ:.....

Trình độ đã qua đào tạo:.....

Số năm công tác:.....

Chuyên môn giảng dạy:.....

Mục đích cơ bản của các đợt DH thực nghiệm là vận dụng các biện pháp vào DH để rèn luyện NLPĐ và LLCCC cho HS trong dạy học HH ở trường THPT.

Sau khi trực tiếp giảng bài (hoặc dự giảng) về nội dung dạy thực nghiệm cho đề tài "***Rèn luyện cho HS NLPĐ và LLCCC để phát hiện tri thức trong dạy học HH ở trường THPT***", xin đồng chí cho biết ý kiến của mình qua những câu hỏi sau:

1. Đồng chí có đánh giá thế nào về mức độ hứng thú, độc lập, tích cực và sáng tạo của HS trong các giờ học thực nghiệm?

Mức đô	Thấp	Bình thường	Khá cao	Cao
Hứng thú				
Độc lập				
Tích cực				
Sáng tạo				

2. Đồng chí có nhận xét gì về giáo án thực nghiệm cũng như PPDH theo quan điểm rèn luyện NLPĐ và LLCCC được xây dựng trong giáo án đối với việc nâng cao hiệu quả DH HH ở trường THPT?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Theo đồng chí, các biện pháp được đề xuất có tính khả thi trong quá trình giảng dạy của các đồng chí không? Nếu có thì đồng chí cho biết hiệu quả sử dụng các biện pháp đó là gì trong điều kiện thực tiễn DH HH ở trường THPT hiện nay?

.....

.....

.....

.....

.....

4. Theo đồng chí NLPĐ và LLCCC có vai trò như thế nào trong việc phát triển NL KP và phát triển NL tự học cho HS? Xin đồng chí cho nhận xét về việc rèn luyện NLPĐ và LLCCC của HS qua bài giảng thực nghiệm?

.....

.....

.....

.....

.....

PHỤ LỤC 7

Bảng hỏi dành cho học sinh sau học thực nghiệm

Họ và tên HS trả lời:.....

Lớp - trường:.....

Sau khi trực tiếp tham gia các bài học thực nghiệm, em hãy cho biết suy nghĩ của mình qua những câu hỏi sau đây:

1. Vai trò của PĐ có căn cứ đối với việc phát triển NL KP và NL tự học của mình trong việc học môn Toán ? Để bồi dưỡng phán đoán có căn cứ, bạn cần có phương pháp học như thế nào?

.....

.....

.....

.....

.....

2. Theo em, nội dung bài dạy thực nghiệm có thực sự phát huy được tính tích cực và sáng tạo cũng như rèn luyện NLPĐ, khả năng lập luận cho người học chưa ? Nếu có, em hãy đưa vài ý kiến của mình để làm sáng tỏ câu trả lời của mình.

.....

.....

.....

.....

.....

3. PPDH trong các bài học thực nghiệm có giúp bạn hiểu bản chất của các định nghĩa, định lý được vận dụng để giải toán không? Em hãy trinh bày suy nghĩ của mình về vấn đề này.

.....

.....

.....

.....

.....

.....